2009.6.　K.K.

# 地球が止まったら

力学初歩の演習問題になるか！？
公転が止まって太陽に落ち込むこと、他。遠心力を導くこと。

　科学館には市民から様々な問い合わせが寄せられる。来年の春分の日はいつか、などと言った日常生活に密着したものが多く、たいがいは大阪市立科学館発行の「こよみハンドブック」で片付いてしまう。そうした中で、たまに寄せられる問題の一つが表題の「地球が止まったら」である。何年か前に喫茶店からあわてた様子で電話をかけてきた男性がいた。友達と論争になり、決着を着けないと店を出られないと言うのである。その問題がこれだった。
　「地球が止まったら」という発想が生まれるのは、地球の自転・公転を既知のこととしているからで、ガリレオ・ケプラーの時代にはおよそ見られなかった光景である。ということで、世界天文年にちなんだ話題として質問に答える形で書いてみた。

## １．自由落下

$$d^2r/dt^2 = -GM/r^2 \qquad (1)$$

両辺に（dr/dt）を掛けるのが解くコツ。
　初速ゼロで落下し始めた地球が太陽表面に達するまでの時間 T(s)で表すと、

$$T = (R^3/2GM)^{1/2}\,(\sin\theta\cos\theta + \theta) \qquad (2)$$

となる。ここで、R は地球の軌道半径（$1.496\times10^{11}$ m）。パラメータ $\theta$ は、

$$\cos\theta = (Ro/R)^{1/2} \qquad (3)$$

という量で、Ro は太陽半径（$6.96\times10^{8}$ m）。
　太陽に激突する時の速度は、

$$V = (2GM/R)^{1/2}\,(R/Ro - 1)^{1/2}$$
$$= 42\,(R/Ro - 1)^{1/2} \quad (\mathrm{km/s}) \qquad (4)$$

　これは、また、ポテンシャル・エネルギー。

## ２．地球は何日後に太陽に衝突か？

　(3)式は $4.65\times10^{-3}$ 位。$\theta = 1.566$、よって

T＝65 日

衝突時の速度Ｖ＝620 km/s。

### ３．遠心力の導出

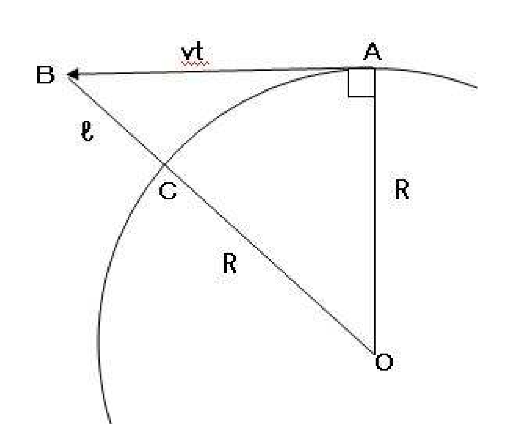

図１．太陽０を中心に円軌道を描く地球

図１を参照。

慣性により、A にある地球は B へ直進しようとするが、実際は C に来ている。これは B から C へ地球が落下したと考えてもよい、というのがニュートンの言いたかったこと（と思う）。

さて、その次である。微小時間　t　の間に B から C に向かって動いている地球はそれ以上落ちないように押しとどめる力を感じてCにとどまる、と考えることができるだろう（この辺りが自己流解釈！）。では、その力はどのように書くことができるか？

三角形 OAB は直角三角形なのでピタゴラスの定理が適用できて、

$$(l+R)^2=(vt)^2+R^2。 \tag{5}$$

これから　l　を求めると、

$$l = v^2t^2/(2R) \tag{6}$$

となる。ただし、 t は微小な時間であるから t の高次の項は無限小とみなし、省略した。

ところで、自由落下で時間 t の間に落ちる距離は $gt^2/2$ と書くことができた。この類推から、加速度を一定でαとすると、この加速度で落ちる距離 $\alpha t^2/2$ が l であるから、

$$\alpha t^2/2=v^2t^2/(2R)$$

となる。これから

$$\alpha=v^2/R \tag{7}$$

という遠心力の表式が求められる。

次元解析なんて方法でも出るが、これはちょっと卑怯（？）。

### ４．地球は落ち続けている！

こうして太陽重力 g に対抗する力が $v^2/R$ となるから、これから、

$$v^2 = gR \tag{8}$$

この $v^2$ を改めて(6)に代入すると、

$$l = gt^2/2 \quad (9)$$

となる。これは自由落下の距離に他ならない。つまり、地球は太陽重力 g の加速度で自由落下し続けていると解釈できる、ということであり、ニュートンが言ったことは定量的にも裏付けられたということである（と、筆者は思っているが、実はちょっと不安）。

なお、(8)から

$$v^2 = GM/R \quad (10)$$

つまり、v=29.8 km/s が得られることや、（4）の速度 42km/s とは 2 のルート倍異なっていることは良く知られている。

## ５．ケプラーの調和の法則

地球は軌道半径 R の円周 2πR を周期 P で運行しているから、その公転速度は 2πR/P で、これが(10)に等しいことから、$4\pi^2R^2/P^2 = GM/R$、つまり

$$R^3/P^2 = GM/4\pi^2 \quad (11)$$

となり、軌道半径の３乗と周期の２乗の比が一定というケプラーの調和の法則＝第３法則が導かれる。

## ６．太陽風は吹くか？

自由落下している地球が太陽に激突する時の速度を求めると 600 km/s ほどだった。逆にこの程度の初速度で太陽から打ち出してやれば地球軌道に達するわけで、太陽風は少なくともこの程度の初速度でなければならないはずである。

太陽コロナによって陽子（質量m、$1.67\times10^{-27}$ kg）が加熱され、その熱エネルギーkT（k はボルツマン定数 $1.38\times10^{-23}$ J $K^{-1}$、T は温度 K）が運動エネルギー$mv^2/2$ に転化するとして温度 T を評価してみると、

2300 万度程度

になる。実際の太陽風は地球付近で秒速 100km から 1000km 程度の速度を持っているからもっと高い温度が必要になる。しかし、熱源のコロナは 100 万度程度だからこんな速度を出すわけにはいかない。ということで、ここで示したような粒子の扱いでは太陽風は説明できず、パーカーがやったように流体としての扱いが必要になってくるという事情が分かってくる。　　　(2009.6.)