

# 半直線電流による電磁場の厳密解

齋藤 吉彦 中之島科学研究所（大阪市立科学館）

## 1 はじめに

最近「物理教育」の企画「変位電流とは何か」で、変位電流が磁場を作るか否かが議論された。この企画の中で、定常電流によって端点に電荷が溜まる半直線電流が思考実験として用いられ、ビオ-サバールの法則を用いた議論で「変位電流は磁場を作らない」の根拠とされた<sup>1),2)</sup>。菅野と著者は、加速電荷の放射を考慮すべきとの指摘をしたが<sup>3),4)</sup>、定量的な吟味がなかったからであろうか、「兵頭論文<sup>2)</sup>では回転がゼロの電場が磁場を作らないことが示され」と認知されるに至っていないようである<sup>5)</sup>。今回は半直線電流による厳密な電磁場の解を与えることで、この定量的な吟味を行う。

ビオ-サバールの法則は定常電流による磁場を求める場合は厳密であるが、それ以外は近似法則である。半直線電流は、端点を除いて定常であっても、端点に電流が溜まるので定常でない。したがって、半直線電流による電磁場は、ビオ-サバールの法則をそのまま用いて得られるものではない。電磁気学における厳密な議論はマクスウェル方程式を原理としてなされるもので、半直線電流も例外ではない。

1820年に発見されたビオ-サバールの法則は電流素片  $I dl$  が作る磁場を

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}(l))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(l)|^3} \quad (1)$$

として与えるものである。これを電流に沿って積分することで、定常電流  $I$  による磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}(l))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(l)|^3} dl \quad (2)$$

が与えられる。多くの電磁気学の教科書では(2)を静的なマクスウェル方程式から導びき、これをビオ-サバールの法則と呼んでいる<sup>6)-9)</sup>。(2)はマクスウェル方程式から導かれるので、近似ではなく厳密な法則である。(1)は被積分関数として、(2)のように閉回路、あるいは無限遠方から無限遠方に至る回路上で積分したときに厳密な意味を持つが、電荷集合体の運動という電流の本質が反映されていない。そのため、2つの電流素片同士の相互作用を(1)で求めると、作用反作用則と矛盾する<sup>6)</sup>。半直線電流は端点が定常でないで、その磁場をビオ-サバールの法則で厳密に考察することはできないのである<sup>10)</sup>。

著者は最近、定常電流の定義を配列間隔が無限小で運動する点電荷列とすることで、その定常電流による電磁場が、ビオ-サバールの法則(2)とクーロン則で与えられる静的な電磁場と一致することを導いた<sup>11)</sup>。本稿ではこの結果を用いて、厳密に半直線電流による電磁場を考察する。なお本稿では、電流は無限小間隔の点電荷列とし、定義をあえて言及する必要がある場合に、「電荷列」を付けて、例えば「電荷列定常電流」などと記す。

## 2 定常電流による電磁場

運動する点電荷による電磁場はマクスウェル方程式にしたがって変動し、電荷  $q$  の点電荷  $P$  が軌跡  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P(t)$  を描いて動くときは次式で与えられる<sup>6)</sup>。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s)(1 - \beta_s^2)}{\alpha_s^3 R_s^2} + \frac{\mathbf{n}_s \times ((\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_s)}{c\alpha_s^3 R_s} \right) \quad (3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(1 - \beta_s^2)}{\alpha_s^3 R_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(\mathbf{n}_s \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_s) + \alpha_s (\dot{\boldsymbol{\beta}}_s \times \mathbf{n}_s)}{c \alpha_s^3 R_s} \right) \quad (4)$$

ここで、添字  $s$  は、いわゆる遅延ポテンシャルを与える電荷密度および電流密度の時空点を意味するもので、時空点  $(t_s, \mathbf{r}(l_s))$  は

$$c(t - t_s) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(l_s)| \quad (5)$$

によって与えられる。

大きさ  $I$  の電荷列定常電流による電磁場は、各点電荷の電磁場、(3) と (4) を重ね合わせることで、すなわち電流に沿って積分することで与えられる。少々面倒な計算で次式を得る<sup>11)</sup>。

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dl_s \left( \frac{I}{c} \frac{d}{dl_s} \left( \frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} \right), \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int dl_s \left( \frac{d}{dl_s} \left( \frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} \right), \quad (7)$$

ここで、 $\rho$ ,  $\mathbf{e}_l$  はそれぞれ、電荷密度、電流方向の単位ベクトルを表す。電流は閉曲線上あるいは無限遠点から無限遠点に至る曲線上を流れるので、全微分の積分は0になる。したがって、積分変数を  $l$  に書き換えると、磁場はビオ-サバルの法則 (2) に一致する。同様にして電場は次のようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \frac{\mathbf{R}}{R^3} dl. \quad (8)$$

これは伝導電子の電荷密度が与えるクーロン場で、通常の電線の場合、正電荷のイオン分布によって相殺されるものである。

### 3 定常電流の部分区間による電磁場

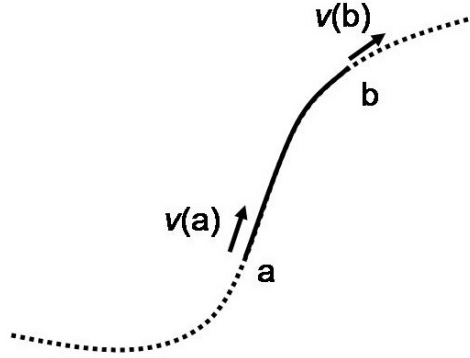


図 1: 部分定常電流のイメージ

(6) および (7) は点電荷による電磁場の重ね合わせなので、電荷列定常電流の一部による電磁場をも与える。ただし、点電荷の集合体が運動しているということが重要で、図 1 のように、 $a$  から  $b$  までの電荷列定常電流の部分を考える場合は、両端はそれぞれの電荷速度  $v(a)$ ,  $v(b)$  で運動しているものとしなければならない。遅延効果に注意して、 $a$  から  $b$  までの部分定常電流による電磁場を表現したのが次式である。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left( \frac{I}{c} \frac{d}{dl_s} \left( \frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \left( \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\alpha R} \right)_{b_s} - \left( \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\alpha R} \right)_{a_s} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left( \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left( \frac{d}{dl_s} \left( \frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \left( \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\alpha R} \right)_{b_s} - \left( \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\alpha R} \right)_{a_s} \right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left( \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

(9) および (10) の第 1 項は部分定常電流の両端の運動による電磁場で、第 2 項は遅延効果を考慮したクーロン則とビオ-サバルの法則である。

## 4 半直線電流による電磁場

半直線電流を  $z$  軸負の方向から原点へ電荷が流れ込むものとして、原点を除いて電流の大きさ

$$I = \rho(z)v(z) \quad (-\infty < z < 0) \quad (11)$$

が一定の定常電流とする。ここで  $v$  は電荷の速度で、原点で静止することに注意しなければならない。

$$\lim_{z \rightarrow 0} v = 0. \quad (12)$$

原点は電荷が溜まるので定常でない。このため、前章で与えた公式 (9) および (10) をそのまま使うことができない。そこで、図 2 のように原点に十分近い点  $z = -\epsilon$  で半直線電流を 2 つの区間、 $a \equiv (-\infty, -\epsilon)$  と  $b \equiv (-\epsilon, 0]$  に分けてそれぞれの区間による電磁場を求める。ここで、電流を 2 つに切断する点  $z = -\epsilon$  は電荷集合体とともに運動することに注意が必要である。すなわち、

$$\dot{\epsilon} = -\dot{z} = -v(-\epsilon). \quad (13)$$

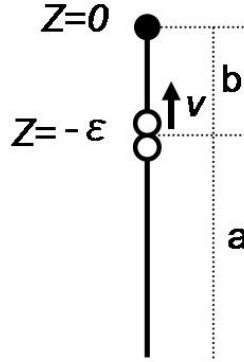


図 2: 半直線電流の切断

区間  $a$  は定常電流の部分なので、(9) および (10) を用いることができ、これによる電磁場は、

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{I}{c} \frac{d}{dz_s} \left( \frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right) dz_s \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{d}{dl_s} \left( \frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right) dz_s. \quad (15)$$

区間  $a$  による変位電流は (14) より、(5)(11)(12)(13) 等を使って整理すると、

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{dt_s}{dt} (-\dot{\epsilon}_s) \times \left( \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{I}{c} \frac{d}{dz_s} \left( \frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right)_{z_s = -\epsilon(t_s)} \\ &= \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) は Fig.2 の区間 a の全電荷の変化からも理解できる。すなわち、原点近傍で電荷が単位時間当たり  $I$  増加するので、これが (16) となるのである。

区間 a による磁場, (15) は,  $\lim_{z \rightarrow -\infty} R = \infty$  であり, (12) より  $\lim_{z \rightarrow 0} \beta = 0$  なので第 2 項は 0 になり, ビオサバールの法則 (1) を用いたものそのものになる。積分を実行し, その回転をとると次のように球対称になる。

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi. \quad (17)$$

$$\text{rot} \mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (18)$$

したがって, 区間 a による電磁場はマクスウェル方程式を満たす。

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B}_a - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

そもそもマクスウェル方程式の解を重ね合わせた電磁場であるので, 必然的な結果である。

次に, 端点近傍による電磁場を考察する。区間 b の電荷

$$Q \equiv \int_{-\epsilon}^0 \rho_s dz_s \quad (20)$$

は時間的に一定で,  $\epsilon$  が十分小さいことおよび (12) から, 端点 ( $z = 0$ ) の近傍でほとんど静止した電荷分布となる。したがって, これによる電場は静的なクーロン場

$$\mathbf{E}_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (21)$$

なので, 区間 b による変位電流は

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

電荷がほとんど動かないので, 磁場は

$$\mathbf{B}_b = 0. \quad (23)$$

以上から, 半直線電流が磁場及び変位電流に寄与するのは, 端点を除いた半直線上に分布し速度  $v(z)$  ( $-\infty < z < 0$ ) で運動する電荷であって, 端点に流れ込んだ電荷ではないことが分かる。

高橋憲明先生と菅野礼司先生から多くのコメントをいただきこの結論を得た。両先生に厚く御礼申し上げます。

## 参考文献

- 1) 鈴木亨：物理教育 **60-1** (2012) 38-43
- 2) 兵頭俊夫：物理教育 **60-1** (2012) 44-51
- 3) 菅野礼司：物理教育 **60-1** (2012) 32-37
- 4) 斎藤吉彦：物理教育 **60-3** (2012) 209-212
- 5) 中村哲・須藤彰三：物理教育 **60-4** (2012) 268-273
- 6) 砂川重信：理論電磁気学 紀伊国屋書店 1975
- 7) プランク：理論電磁気学 裳華房 1927
- 8) ランダウ：電磁気学 1 東京図書 1965
- 9) ファインマン：電磁気学 岩波書店 1969
- 10) 高橋憲明：近畿の物理教育 **19** (2013) 3-8
- 11) 斎藤吉彦：大学の物理教育 2013 年 9 月 8 日投稿 審査中