第43回物理教育研究集会141122

ジェフィメンコ式は
マクスウェル方程式を超えるか？

斎藤吉彦

大阪市立科学館　中之島科学研究所

マクスウェル方程式

電磁気学の原理

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

電磁誘導

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

湧き出し
吸い込みなし

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

クーロン則

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

電流周囲の磁場

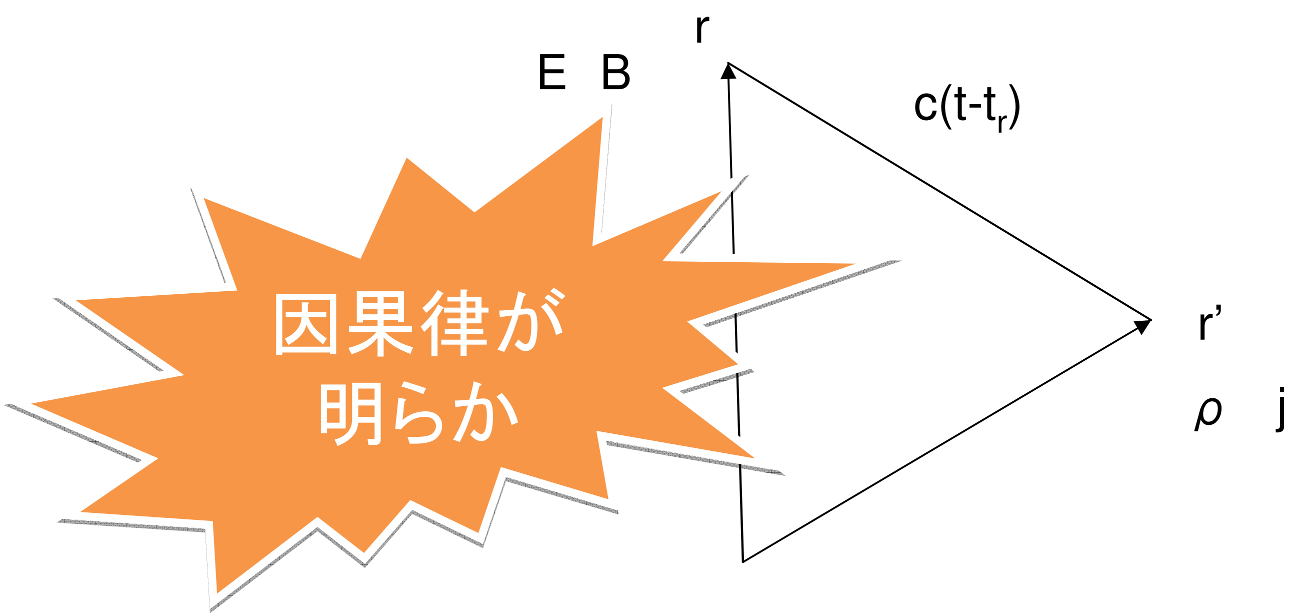
ローレンツ力

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$$

ジェフィメンコ式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\left(\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \frac{1}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$



$$t_r = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$$

ジェフィメンコ式の導出

マクスウェル方程式を
電磁ポテンシャルで表現

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

電磁ポテンシャルの定義

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

両辺に $\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{-1}$ を掛ける

弾性体内の波動方程式と同型

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \epsilon_0\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

ローレンツ条件

遅延ポテンシャル、先進ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{R}$$

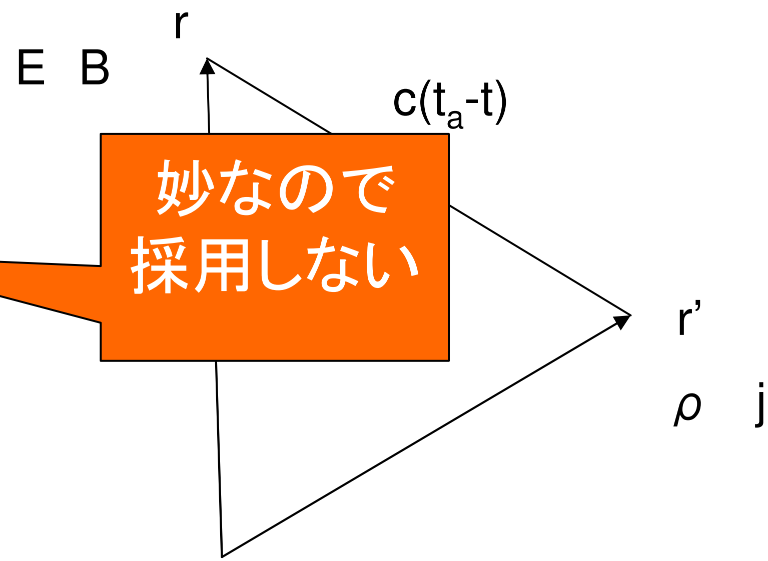
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{R}$$

ジェフィメンコ式

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$t_a=t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$$



ローレンツ条件は？

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

電荷が保存　$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0$$ $\Rightarrow$ OK

マクスウェル方程式には内在

ジェフィメンコ式は任意のρjに対してOK

別途必要

解は遅延ポテンシャルだけ？

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

→ 遅延ポテンシャル

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = 0$$

→ 自由場

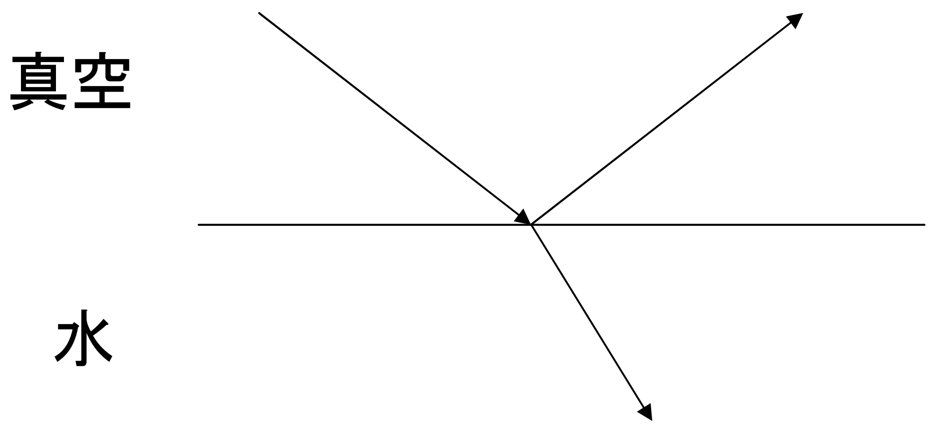
遅延ポテンシャル＋自由場　も　解

先進ポテンシャル　ー　遅延ポテンシャル ＝自由場

ジェフィメンコ式は自由場を与えない

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\left(\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} + \frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \frac{1}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} + \frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$



平面波の侵入

ジェフィメンコ式で
解ける？

マクスウェル方程式は
OK

ρ j に対する電磁場とは？

マクスウェル方程式を解けばよい

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$
$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

？

初期条件 $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ を与えて積分

$$M : \{\rho, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0\} \mapsto \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}\}$$

点電荷に対する電磁場

静止した点電荷はクーロン場、
運動する点電荷はジェフィメンコ式？

t＜－∞　真空　E=B=0

t＝－∞　対生成　$q^- + q^+$

t＝0　q^- 無限遠方へ　q^+ が残る

$$M : \{\rho, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0\} \mapsto \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}\}$$

で解けばよい

ジェフィメンコ式は電磁波の伝搬を記述するか？

ジェフィメンコ式：ρ　j　が必要

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\left(\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\frac{1}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

マクスウェル方程式：ρ＝０　j＝０

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0$$

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=0$$

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}=0$$

弾性体内の波動と同型

弾性体の波動

内部の変形が周囲の変形を励起し、変形が伝播

電磁波

E･Bの空間的変化が周囲のE･Bを励起

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

変位電流が磁場を作る？

$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ が変位電流 $\epsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ を作る

まとめ

ジェフィメンコ式はマクスウェル方程式を超えない

ジェフィメンコ式は

- 電荷の保存を内在しない
- 自由場を扱えない
- 電磁波の伝搬機構を記述しない

その他

自由マクスウェル方程式と弾性体内の波動との類推は「磁場の空間的変化が変位電流を作る」という解釈を与える