ジェフィメンコ式はマクスウェル方程式を超えるのか？

斎藤 吉彦　中之島科学研究所（大阪市立科学館 ）

1　はじめに

近年、「物理教育」において、ジェフィメンコ式を用いた議論がなされているが[1)-4)]、これらの議論によって、ジェフィメンコ式がマクスウェル方程式よりも上位の法則であるというような解釈が広まりつつあるように思われる。ここでは、そのような解釈は誤りであることを論じる。

電磁的現象を支配するもっとも基本的な自然法則は、マクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{3}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{4}$$

とローレンツ力

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{5}$$

である。マクスウェル方程式は電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ が与えられたときに、電磁場を決める方程式であり、ローレンツ力は電磁場が帯電体に作用する力の密度で、電磁場を与えると帯電体の運動が決まるのである。すなわち、マクスウェル方程式とローレンツ力を用いた電荷に対する運動方程式が古典電磁気学の原理であり、全ての電磁現象がこれらから導かれるのである。数学の公理のようなものであり、これに矛盾するような現象があれば、新たな理論が必要となる。例えば、古典電磁気学では原子は電磁波を放射して崩壊してしまうので量子力学が必要となる。

一方、ジェフィメンコ式は任意の電荷密度と電流密度に対して電磁場を与える次の表式である。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\left(\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} + \frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \frac{1}{c^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} + \frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\right)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{7}$$

ここで、

$$t_r = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} \tag{8}$$

これらは、よく知られた遅延電磁ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{10}$$

を電磁ポテンシャルの定義式

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{12}$$

に代入することによって得られる。したがって、ジェフィメンコ式はマクスウェル方程式の一般解と思いたいところであるが、これは以下で述べるように誤解である。

第 43 回物理教育研究集会予稿
”Are Expressions of Jefimenko beyond Maxwell’s Equations ?” Yoshihiko Saito

2　ジェフィメンコ式は電荷の保存則を内在しない

マクスウェル方程式には電荷の保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{j}=0 \tag{13}$$

が内在している。すなわち、(4) の両辺に div を作用させ (3) を代入すれば電荷の保存則が導かれる。一方、ジェフィメンコ式は任意の電荷密度と電流密度に対する電磁場の表式なので、電荷の保存則 (13) を満たさない電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ を代入することも可能である。つまり、ジェフィメンコ式はマクスウェル方程式と矛盾する電磁場も許すのである。

じつは、遅延電磁ポテンシャルは線型方程式

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{14}$$

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j} \tag{15}$$

の特解であるが、(14)(15) がマクスウェル方程式と同値になるには、ローレンツ条件

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{16}$$

が必要である。遅延電磁ポテンシャルにこの条件が課せられていることが、いつのまにか忘れられているようである。電荷の保存則 (13) を使えば、遅延電磁ポテンシャル (9)(10) がローレンツ条件 (16) を満たすことを示しうる[5)]。したがって、ジェフィメンコ式は電荷の保存則 (13) を満たす場合にマクスウェル方程式の特解になるのである。以下では、電荷の保存則が満たされていることを前提に議論する。また、ジェフィメンコ式は特解であって一般解ではないことに注意が必要である。このことについては次章以下で議論する。

3　ジェフィメンコ式は自由場を記述できない

以下では、$\rho=0\wedge\boldsymbol{j}=0$ の場合のマクスウェル方程式の解や電磁ポテンシャルの解を自由場と呼ぶ。ジェフィメンコ式、あるいは遅延電磁ポテンシャルに自由場を加えたものが一般解である。ジェフィメンコ式や遅延電磁ポテンシャルは、その表式から明らかなように、自由場として $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$ や $\phi=\boldsymbol{A}=0$ の自明なものしか与えない。しかし、非自明な自由場は無数にあり、古典電磁気学では様々な場面で使われている。たとえば、光が真空中から水へ侵入したときの屈折と反射を求めるのに、進入波、反射波、透過波はそれぞれを平面波として扱うが、それらは自由場である。もし、ジェフィメンコ式でこの問題を扱うには平面波を生成する電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ の存在を吟味しなければならない。また、進入波を太陽光とすると、その起源は量子論的なジャンプによるものであり、これを古典的な平面波と近似する処方はジェフィメンコ式にはないであろう。自由場を自由自在に扱えるのは、$\rho=0\wedge\boldsymbol{j}=0$ の場合のマクスウェル方程式を認めるからである。

4　ジェフィメンコ式は因果律を陽に含むが、マクスウェル方程式には因果律は内包されていない？

中村・須藤は「因果律はマクスウェル方程式に内包されているのではなく、遅延解（遅延電磁ポテンシャル (9)(10) のこと）を選択することで導入されている。」と述べ、遅延解から得られるジェフィメンコ式が「近接作用的に遅延効果を顕に見える形で電磁場を表現した方程式である。」と説いている[4)]。この言及に対して次のような疑問が生じる。前章で述べたようにジェフィメンコ式はマクスウェル方程式の特解であって一般解でない。ジェフィメンコ式が物理的に許される唯一の解なのか？

遅延ポテンシャルはグリーン関数と呼ばれる (11)(12) の左辺の２階微分作用の逆演算をこの２式の両辺に作用して求めたものである。この解法において、２階微分を反映して次の先進電磁ポテンシャルと呼ば

れる特解も同時に得られる。

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{18}$$

ここで、

$$t_a=t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} \tag{19}$$

中村・須藤はこの２つの特解の存在を指摘し、「電磁ポテンシャルの因果的源は電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ であり、その影響は瞬時でなく $\cdots$ 」と遅延ポテンシャルが採用される理由を説いている[4)]。しかし、遅延ポテンシャルも先進ポテンシャルも特解であるならその差は自由場であり、先進ポテンシャルは遅延ポテンシャルに自由場を加えたものと理解できる。これは線型微分方程式の一般的なことであって、じっさいに遅延ポテンシャルと先進ポテンシャルの差を (14)(15) の左辺に代入すれば分かることである。したがって、遅延ポテンシャルが物理的なら先進ポテンシャルも物理的である。また、この自由場に対応する電磁場

$$\boldsymbol{E}_f=\boldsymbol{E}_a-\boldsymbol{E}_r \tag{20}$$

$$\boldsymbol{B}_f=\boldsymbol{B}_a-\boldsymbol{B}_r \tag{21}$$

も自由場である。ジェフィメンコ式が物理的な解というなら、ジェフィメンコ式にこの自由電磁場の定数倍を加えたものも物理的な解である。自由場を排除する理由がない限り、ジェフィメンコ式が唯一物理的な解であるという理由はないように思われる。

原理的には、マクスウェル方程式は、初期条件としてある時刻での電磁場を与えたら、電流密度と電荷密度に対して、任意の時刻での電磁場を与えるはずである。つまり、マクスウェル方程式は次のような写像 M を与えると考えてよいであろう。

$$M:\{\rho,\boldsymbol{j},\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{B}_0\}\mapsto\{\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}\} \tag{22}$$

この写像はマクスウェル方程式を使って時間方向に積分することで求めることができるはずである。この処方で、源による純粋な電磁場、すなわち自由場を含まない電磁場を考えることができる。すなわち、初期条件として無限の過去に対生成により２つの符合の異なる等電荷の点電荷 A,B が生成されたとし、それ以前は真空であったとすれば、初期条件の電磁場は

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{B}_0=0 \tag{23}$$

で与えられる。対生成の後、A が無限遠方に遠ざかり、B が現存しているとすれば A による影響は無視できる。したがって、この系による電磁場は点電荷 B による純粋な電磁場と考えられる。ジェフィメンコ式や遅延ポテンシャルがこのようにして得た解と一致すれば、これらは自由場を含まない純粋な場と考えてよいであろう。次の事がこの仮定の正当性を示唆している。すなわち、等速直線運動する点電荷による電磁場は、静止した点電荷による電場を座標変換して得られるが、これが遅延電磁ポテンシャルによって得られる電磁場と一致するのである。「因果律はジェフィメンコ式を選択することで導入されている。」[4)]のではなく、マクスウェル方程式を正当に解くことでジェフィメンコ式が得られるのではなかろうか。

中村・須藤は「マクスウェル方程式だけから因果関係を読み取ることは原理的に不可能である。」と主張するが[4)]、マクスウェル方程式が源（電荷密度と電流密度）と初期条件によって電磁場を与えるのである。

5　電磁波の伝播とマクスウェル方程式

電磁ポテンシャルに対する方程式、(14)（15）は弾性体の波動方程式と同型である。弾性体の場合、右辺は波動を生み出すトリガーに対応すると考えてよいであろう。右辺が 0 の領域では、左辺は速度 c で伝播する波動を記述する。電磁波の場合は弾性体のような媒質はないが、方程式が同型なので、弾性体から得られるイメージで考察してもよいであろう。

弾性体の場合は内部の変形がその近傍の変形を励起することで変形が伝播する。これを記述するのが弾性体各点における変位ベクトルに対する方程式で、(14)（15）の右辺を 0 とした波動方程式である。変形は変位ベクトルの空間的な変化なので、弾性体各点における変位ベクトルのありようが変位ベクトルの時

間発展を決定する。トリガーによって波動が励起されるが、波動の時間発展を考察するのにトリガーのありようは必要なく、変位ベクトルの初期条件だけでよい。方程式が同じなので電磁ポテンシャルも同様のイメージを持つことができる。すなわち、任意の位置での電磁ポテンシャルのありようがその近傍の電磁ポテンシャルを変動させ、この変動が四方八方へと伝播するという時間発展のイメージである。つまり、真空中の方程式が電磁ポテンシャルの時間発展を記述しているのである。(11)(12)(14)(15)(16) の方程式系はマクスウェル方程式 (1)〜(4) と同値なので、電磁場に対しても同様のイメージが許される。じっさい、$\rho = \boldsymbol{j} = 0$ ならば、電磁場に対しても

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{24}$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{25}$$

がマクスウェル方程式から得られ、弾性体の波動方程式と同型になるので、電場と磁場に対しても電磁ポテンシャルと同様、弾性体の波動イメージが得られる。ただし、電場と磁場はそれぞれが独立な存在ではなく、(1) と (4) のような関係にあることに注意が必要で、電場と磁場それぞれの空間的ありようが相互の時間発展を規定している。このことによって電場と磁場がそれぞれ弾性体の波動と同型になるのであって、電場と磁場の波動の内的な構造をマクスウェル方程式が記述しているのである。

中村・須藤も「空間の属性である電場と磁場は勝手な値を取ることはできず、常にマクスウェル方程式を満たす必要がある。このため真空中において媒質が存在しなくとも電磁波が伝播する。」と上記のことと同様のことを述べている。しかし、その直後にジェフィメンコ式をもとに電磁波の伝播、そして物質境界における電磁波の振る舞いを説いている[4)]。ここで注意すべきことは、電磁波の振る舞いをジェフィメンコ式に頼るなら、源の振る舞いを知る必要があることである。一方、マクスウェル方程式は、源を知らなくても初期条件だけを与えたら弾性体の波動のように電磁波の振る舞いを与えるのである。電磁波の伝播機構を記述するのはジェフィメンコ式ではなく、源なしのマクスウェル方程式である。

ところで、ジェフィメンコ式による一連の議論は変位電流 $\epsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ が磁場を作るかどうかを考察したものである[1)-4)]。マクスウェル方程式は電場と磁場の波動方程式 (24)(25) とは同型ではないが、上で考察したように場の空間的ありようが時間発展を決めるという論理を使うなら、変位電流が磁場を作るのでなく、磁場の空間的変化が変位電流を作ることになる。ニュートンの運動方程式もシュレディンガー方程式も左辺が変位電流のように求めるべき未知数の時間微分である。この問題は今後の課題とする。

6　まとめ

最近の「物理教育」における議論で、ジェフィメンコ式がマクスウェル方程式より上位の法則と感じることがあるかもしれない。しかし、それは誤解であって、古典電磁気学の最も基本的な法則はマクスウェル式とローレンツ力である。本稿では、ジェフィメンコ式とマクスウェル方程式を比較することで、このような誤解を解くことを試みた。論理的にはこのような比較検討の必要はない。なぜなら、マクスウェル方程式とローレンツ力を用いた電荷に対する運動方程式は古典電磁気学の公理のようなものであり、電磁現象のすべての法則はこの２つから導かれるので、マクスウェル方程式とローレンツ力より上位の法則はないからである。

本稿は菅野礼司先生との議論をもとに著者の理解をまとめたものである。議論いただいた菅野先生に御礼申し上げる。

参考文献

1) 鈴木亨：物理教育 **60**-1 (2012) 38-43
2) 兵頭俊夫：物理教育 **60**-1 (2012) 44-51
3) 中村哲・須藤彰三：物理教育 **60**-4 (2012) 268-273
4) 中村哲・須藤彰三：物理教育 **62**- 1 (2014) 23-29
5) 砂川重信：理論電磁気学　紀伊国屋書店 1975