

本誌の企画「変位電流とは何か」で、3編の論文が「変位電流は磁場を創らない」の議論を与えている。これらは、時間変化をする球対称電場の存在の正否が要となっている。本稿は、この電場がマクスウェル方程式と矛盾することを根拠に、設定されたモデルを否定する。さらに、モデルが仮定する荷電粒子の運動が非物理的であることを具体的に示す。本編の議論は電磁場の相対論的理解が背景にあり、教育者にとって電磁気学の相対論的理解の必要性を主張する。

キーワード 変位電流, 電場, 磁場, マクスウェル方程式, 相対論

1. はじめに

物理教育誌前号の企画「変位電流とは何か」で3つの論文が掲載され、「変位電流は磁場を創らない」という命題の真偽が議論されている。鈴木論文¹はこの命題の正当性を主張するレビューである。兵頭論文²は鈴木が議論の根拠としたモデルを現実的なものに改良し、この命題を検討している。菅野論文³は鈴木が根拠としたモデルの問題点を指摘している。しかし、兵頭が新モデルを設定しているので、菅野の主張は不完全とされるかもしれない。本稿では、「変位電流は磁場をつくる」の立場で論じた菅野論文を補うことを目的に、上記の2モデルについて、それぞれに共通する誤りの本質を明らかにする。

2. マクスウェル方程式

電磁気学は19世紀に完成された体系で、マクスウェル方程式により電磁現象を記述するものである。古典力学が力学的対象をニュートンの運動方程式で記述するのと同じである。つまり、電磁現象をいかにマクスウェル方程式を使って説明するかというのが電磁気学である。マクスウェル方程式は電磁気学において公理のようなもので、それを修正したり疑問を抱くような対象ではなく、絶対的なものである。マクスウェル方程式で説明できない現象は、別の学問体系が必要で、たとえば原子スペクトルや超伝導は量子力学が必要である。つまり、電磁現象を扱うにはマクスウェル方程式だけで十分で、それ以上のものは必要ない。実験装置の設計も実験結果の解析もマクスウェル方程式が原理となる。また、場の量子論など新理論の構築はマクスウェル方程式が拠り所にされる。マクスウェル方程式を厳密に解くのは多くの場合が非常に困難なので、効果的な近似的手法が必要とされる。

さて、マクスウェル方程式は電磁場の時間発展を与え

る次の方程式である。

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial \vec{D} / \partial t = \sum_i Q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \sum_i Q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

ここで、 Q_i 、 \vec{r}_i 、 \vec{v}_i はそれぞれ荷電粒子 i の電荷、位置、速度である。また、(1)と(3)の右辺がそれぞれ電流密度 \vec{j} と電荷密度 ρ で、荷電連続体として扱われる場合がほとんどである。あえてこのような離散的な表現を与えたのは次の理由による。

電流密度 \vec{j} と電荷密度 ρ は連続体としての運動を表しているので、時間的に変化しない定常的な場合でも、安直にその時間微分を0としてはならない。時間微分は(1)や(3)の右辺の連続極限から導出されるもので、次がその結果である。

$$\dot{\rho} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (5)$$

$$\dot{\vec{j}} = \rho \dot{\vec{v}} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho) \vec{v} \quad (6)$$

定常的な法則として知られるアンペールの法則やビオ-サバールの法則はこれらを0としてマクスウェル方程式から導くことができる。すなわち、アンペールの法則やビオ-サバールの法則は定常的な厳密法則でなく、近似法則なのである。たとえば、次のことがこれを反映している。ビオ-サバールの法則によって求められた定常円電流による磁場公式は有名であるが、荷電粒子が等速円運動

する際に発する電磁波を無視したものである。アンペールの法則やビオ-サバールの法則は荷電連続体の運動を無視した近似的なものであることに注意しなければならない。後に詳しく書くが、鈴木と兵頭は、これら定常的な近似法則をマクスウェル方程式と対等なものとし、近似ではなく厳密なものとして扱ったので混乱した議論を招いている。回路内の電子の移動は極めて緩やかなので、定常電流回路を扱う場合は荷電粒子の運動を無視できるが、「変位電流とは何か」というような原理的なことを議論する場合は、厳密でなければならない。

さらに、マクスウェル方程式の(1)式について注意すべきことがある。初学者にとっては、天下りのマクスウェル方程式を与えられても、それを理解するのは困難である。そこで、教育的な観点から、その完成までの歴史が紹介されることが多い。すなわち、アンペールの法則やビオ-サバールの法則などの定常的な近似法則を、非定常な現象、例えば、コンデンサーを含む交流回路等に強引に援用させ、マクスウェル方程式を導出するのである。これは、電磁現象を支配する方程式を発見するために、飛躍的な思考をしているのである。定常の場合にしか成り立たない近似的な法則からマクスウェル方程式が論理的に演繹されるのではない。鈴木論文は誤解を与えかねないので、あえて注意を与えた。アンペールの法則やビオ-サバールの法則はマクスウェル方程式の下位にある法則で、電磁現象を扱うにはマクスウェル方程式で必要かつ十分であることを強調しておきたい。

さて、鈴木・兵藤論文はマクスウェル方程式と矛盾する電場を導出し、「変位電流は磁場を創らない」の根拠にしている。荷電粒子に、ある運動を仮定し次のような時間変化する球対称な電場を与えるのである。

$$\epsilon_0 \partial E / \partial t = I / 4\pi r^2 \quad (7)$$

マクスウェル方程式(1)において、この様な電場に対する磁場 B の解は存在しないので、(7)はマクスウェル方程式によって禁止されている。彼らは、マクスウェル方程式と矛盾する結果を導出したという間違いを検討せずに、さらに議論を発展させるのである。この間違いは次のような簡単な検討で自明なものである。すなわち、荷電粒子の運動が相対論的なら、マクスウェル方程式を満足する電磁場が一意的に求められる。これは電磁気学の重要な帰結であって、疑問を唱える読者は無いであろう。兵頭論文にも公式として (A. 19) (A. 20) に与えられている。したがって、もし、マクスウェル方程式と矛盾する電磁場が得られたなら、その時の荷電粒子の運動は理論的に許されないのである。つまり、彼らは理論的に許さ

れない荷電粒子の運動から得た結果を根拠に議論しているのである。次章では、鈴木と兵藤それぞれが与えたモデルが非物理的であることを明らかにする。

3. モデル設定の誤り

3.1 鈴木論文の場合

鈴木は、一様な電流 I が流れる半無限の直線導線で、その端点に電荷が

$$q = It \quad (8)$$

のように溜まるモデルを取り上げ、次のような検討をしている。すなわち、任意の点 P の磁場を、半無限電流によるものとしてビオ-サバールの法則から、また一方で、電荷(8)による変位電流から、それぞれが同じ値になることを与え、この結果についての様々な解釈を与えている。さらに、変位電流が(7)式のように球対称となることから、マクスウェル方程式を満たす磁場は存在しないとの解釈をも与えている。これらの議論は、荷電粒子の運動を無視したために、混乱に陥ったものと思われる。

それでは、荷電粒子の運動を吟味することにより、問題点を明らかにする。荷電粒子は無遠方から導線の端点に移動し、そこで静止する。つまり、減速しているので荷電粒子はマクスウェル方程式に従って、電磁場の変動を引き起こし、これが空間を伝播する。荷電粒子の減速は電磁波の起源となる。点 P で議論されるべき電場と磁場は、全ての荷電粒子の運動が起源となる電磁場を重ね合わせたものなので、マクスウェル方程式(1)を満たすのは明らかである。なんら問題は生じていない。鈴木が取り上げた議論は、この加速運動を無視し(6)を0としたものである。相対論の双子のパラドックスで、初学者が宇宙旅行の帰還時の加速運動を気付かずに悩むのと同様であろう。また、鈴木は、端点の電荷の変化を連続的なものとして(7)を与え議論の根拠としているが、これも上の考察で既に解決している。あえて端点の効果を考察してみると、荷電粒子一個の電荷密度の変化は(5)より0、つまり端点の効果は静的、よって変位電流は0となる。したがって、全ての荷電粒子について、この結果を重ね合わせても変位電流は0となる。荷電粒子の数が有限個であれば(7)のようなことは決して生じないが、無限個の極限結果を扱う場合は注意が必要である。このような離散的描像からの連続極限の操作と時間微分の演算操作は、多くの場合は操作の順序は無視しても問題が生じないが、前者は後者の後に行われるべきものである。なぜなら、連続体の運動は離散的描像をも

まとめ

とに演繹されるので、離散的描像と矛盾しないように、連続体を扱わなければならないのである。(7)は「猫ひねり⁴を無限小の時間間隔で繰り返すことで、外力なしに角運動量が得られる。」という主張に似ている。

3.2 兵頭論文の場合

兵頭は上のモデルをより現実的なものに修正しているが、連続体の運動を無視した同質のものである。それは、「原点Oに中心をもつ非常に小さな半径aの導体球に帯電させた電荷qを放電させる状況を考える。・・・瞬時に放電しないように、また、電場の球対称が乱れないように、導線は全抵抗がRで、・・・」というものである。

このモデルの考察を行う。初期条件として、導体球の電荷分布が球対称であったとしても、放電を開始すると、その信号は導線を光速で伝搬し、まずは導線が結線された導体球近傍の電荷の移動が起こり、この部分の電荷密度が小さくなる。すなわち球対称が崩れる。再び球対称に復元したとしても、この状態が安定するというメカニズムはない。たとえ、球対称のまま放電したとしても、次に示すように、その現象が起こるには光速度を超える荷電粒子の運動が必要で、相対論に反するものである。導体球面の導線と直行する断面での電荷の時間変化と電流の入出との関係

$$\begin{aligned} ad\theta \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot \dot{\rho} \\ = 2\pi a \sin \theta \cdot j(\theta) - 2\pi a \sin(\theta + d\theta) \cdot j(\theta + d\theta) \end{aligned}$$

から

$$a\dot{\rho} \sin \theta = -d(j \sin \theta) / d\theta$$

が得られる。ここで、座標の定義は兵頭論文に従う。これを解くと、

$$j = a\dot{\rho} (\cos \theta - 1) / \sin \theta \quad (8)$$

すなわち、導線が結線された近傍で ($\theta \approx \pi$)、電流密度は無限に大きくなる。電荷密度が導体球表面上で一定値なので、これは荷電粒子の速度が無限に大きくなることを意味する。小さな出口を一定量の電荷が流れるには極めて大きな速度が必要なことは自明であろう。相対論で禁止された光速度を超えた運動である。相対論を無視したとしても、無限大の運動エネルギーが必要である。導線を太くして荷電粒子が光速を超えないようにしようとすると、球対称電荷分布が崩れる。電荷分布が球対称であるためには、導線は太さのない幾何学的な線でなければならない。

マクスウェル方程式は電磁場を与える方程式で、その源は相対論的な運動をする荷電粒子である。すなわち、荷電粒子の運動が相対論的であれば、それに対応する電磁場がマクスウェル方程式にしたがって相対論的時間発展するのである。これは自明の理のはずで、「変位電流は磁場を創らない」がなぜ今更議論となるのであろうか。電場と磁場はマクスウェル方程式で関連付けられる異質な量と解されているからではないだろうか。これは間違いである。電磁場は4次元時空における相対論的なテンソル場で、電場と磁場はある慣性系を指定した時の電磁場の成分である。電場と磁場を異質な量とするのは、たとえば、地球上の風の速度場において、緯度成分と経度成分とを異質と解するのに等しい。電荷密度と電流密度も異質な量ではなく、4次元電流密度ベクトルの時間成分と空間成分である。マクスウェル方程式(1)～(4)は、4次元電流密度ベクトルを与えた時の4次元電磁場テンソルを与える方程式である。具体的な表現や解説は教科書⁵に譲ることにし、相対論的理解がないと陥るパラドックスの一つを例示し、教育者にとって、上記理解の必要性を述べる。

パラドックス：「磁場中で静止している荷電粒子には外力は作用しない。一方、これを慣性系から見るとローレンツ力が働く。よって、観測者によって荷電粒子の運動が異なる。」

このパラドックスに気づく初学者は少なくないであろう。素晴らしい気づきである。しかし、適切な助言がないと、「優秀な学生」は思考を停止し、教科書を丸覚えし、受験勉強に邁進する。一方、「出来の悪い学生」は、この矛盾に悩み、自信を失い、物理の勉強から脱落する。自力でこの矛盾を解決できるのはアインシュタインなど大天才に限られる。ところが、鈴木論文に「初学者にモーターと発電機を教えるのに、相対論の概念が不可欠なのであろうか。物理学的な真偽と教育的な可否はまた別であろう。」とある。これは相対論の学習から逃避したい者にとってはうれしい文節であろうが、教育者にとっては電磁気学の相対論的理解は必須なのである。

次に光子について付記する。光子は相対論的な電磁場の量子論的存在で、スーパーカミオカンデをはじめ多くの実験現場で、光電子増倍管などを用いて観測されている。電磁波は4次元時空での電磁場の変化で、これが粒子的存在として光速度で空間を移動する。電場と磁場が異質なものであるのではなく、電磁場がマクスウェル方程式を満たす相対論的な存在なのである。この

理解を背景に、そして、マクスウェル方程式を絶対的なものとして、再度「変位電流は磁場を創らない」という命題を考えていただきたい。

最後に、権威について触れたい。3 論文について「いろいろな考え方がある。」と理解する教育者が多いと聞く。権威者が異なる見解を示したからであろう。さらに、菅野は権威ある教科書を否定しているからなおさらである。権威者や教科書は学習者にとって絶対的なものである。学習者は、その内容が理解できなければ、結論だけを覚えようとする。しかし、教育者も同じであってよかろうはずがない。論争の決着を待つのではなく、自分の思考や判断に責任をもって学習していただきたい。

元来優秀な学生が、「優秀な学生」「出来の悪い学生」に育つ、このようなことがないことを願って本編を投稿する。

1 鈴木亨：物理教育 60-1(2012)38-43

2 兵頭俊夫：物理教育 60-1(2012)44-51

3 菅野礼司：物理教育 60-1(2012)32-37

4 猫は仰向きで落下しても、足や体を伸縮させて体をねじることで、体を反転させて着地することができる。

5 砂川重信：「理論電磁気学」紀伊國屋書店(1975)

中野董夫：「相対性理論」岩波書店(1995)