半直線電流による厳密な電磁場の定性的理解

斎藤 吉彦 大阪市立科学館 中之島科学研究所 〒530-0005 大阪市北区中之島 4 - 2 - 1

半直線電流による電磁場の厳密解について，定性的な導出を与える．端点近傍を除いた半直線部分による変位電流と磁場の回転はともに球対称で，マクスウェル方程式を満たすことが分かる．一方，端点近傍部分による磁場と変位電流はともに 0 である．「変位電流は磁場を創らない」というような問題は生じない．

1. はじめに

日本物理教育学会では電磁気学の根幹を揺るがすような問題が提起されたまま，決着を見ることがなく今日に至っているようである．それは鈴木論文[1)]と兵頭論文[2)]によるもので，半直線電流による磁場の考察を根拠に「変位電流は磁場を創らない」という説である．半直線電流とはコンデンサーに電荷を溜める問題を単純化したモデルで，定常電流によって端点に電荷が溜まるとするものである．変位電流は電磁気学の基礎方程式，マクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j}_e \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho_e. \tag{4}$$

を構成する項の一つで，アンペール・マクスウェルの法則と呼ばれる (3) の左辺第 2 項，$\epsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ である．電磁気学はマクスウェル方程式を拠り所にして，電荷密度 ρ_e と電流密度 $\boldsymbol{j}_e$ が与えられた時の電磁場を求めるものである．変位電流のおかげで，マクスウェル方程式は電荷の保存則を満たし，また，電磁波の存在を予言するのである．「変位電流は磁場を創らない」というのは，電磁気学が拠り所とするマクスウェル方程式の一つ，アンペール・マクスウェルの法則 (3) を否定するもので，現代物理学の根底を揺るがすような大問題である．また，学校現場においても「電場の時間変化が磁場を生じ，磁場の時間変化が電場を生じる」と教えられるので，教員を不安に陥れる大問題である．

半直線電流がアンペール・マックスウェルの法則 (3) を否定するというというのは，次のような議論である．

半直線電流を，z 軸に沿って負の方向から原点に流れ込む大きさ I の定常電流とする．原点で単位時間当たり I の電荷が溜まるとするのである．この場合，定常電流による磁場 $\boldsymbol{B}_{hl}(\boldsymbol{r})$ はビオ-サバールの法則を慣用すると

$$\boldsymbol{B}_{hl}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}dz\frac{\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{r}-z\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{r}-z\boldsymbol{k}|^3} \tag{5}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi \tag{6}$$

を得る．一方，原点で電荷が $It+Q_0$ と増加するので，これによる電場は

$$\boldsymbol{E}_{end}(\boldsymbol{r})=\frac{It+Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{7}$$

となり，変位電流は

$$\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}_{end}}{\partial t}=\frac{I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{8}$$

となる．この変位電流はアンペール・マクスウェルの法則 (3) によって磁場 $\boldsymbol{B}_{end}$ をつくるはずである．しかし，兵頭論文では，(8) が球対称なので，これに対応する磁場は

$$\boldsymbol{B}_{end}=0 \tag{9}$$

となる導出を与え，変位電流は磁場を創らない，したがって，半直線電流による磁場は $\boldsymbol{B}_{hl}$ であると結論するのである．ここで注意すべきことは，端点による電磁場は，(7) と (9) から

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}_{end}-\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}_{end}}{\partial t}=-\frac{I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\neq 0 \tag{10}$$

となるので，半直線電流による電磁場はマクスウェル・アンペールの法則 (3)（電流の存在しない領域は右辺が０）と矛盾するのである．

しかし，この主張は次の推論によって否定されるものである．すなわち，多数個の伝導電子が電線を移動するという電流イメージからは，たとえ半直線電流であってもマクスウェル方程式と矛盾する電磁場が導出されるはずがない．なぜなら，運動する点電荷に対する電磁場，マクスウェル方程式の厳密解が知られているので[3]，それらを半直線電流の伝導電子全てについて足し合わせたものが，半直線電流の電磁場になるはずである．マクスウェル方程式の厳密解を足し合わせたものはまたマクスウェル方程式の厳密解になるので，決して (10) のような矛盾は生じないはずである．菅野と著者は，このように主張したが[4),5]，定量的な吟味がなかったからであろうか,「兵頭論文[2]では回転がゼロの電場が磁場を作らないことが示され」[6]と認知されるに至っていないようである．

そこで著者はこの「はず」を実際に解析することで，半直線電流による電磁場はなんら問題はなく，常識的なものであることを確認した[7]．決して，鈴木・兵頭が提起した問題は生じないのである．厳密な議論は文献 7) にゆずることとし，本稿では，マクスウェル方程式を扱わない学校現場への解説を目的に，この電磁場についての定性的な導出を行う．

2. 半直線電流による厳密な電磁場

以降では，電流のイメージを，点電荷が１列に整列し回路に沿って一方向に運動しているものとする．配列間隔を無限小にする極限操作を行うが，端点で点電荷が静止するという加速を扱うので，配列間隔を点電荷の速さ v に比例したまま無限小にする．Fig.1 は z 軸の原点近傍で電荷が減速し，原点で静止した電荷が溜まるという半直線電流のイメージで，このような間隔比のまま無限小にするのである．その結果，回路上いたるところで電荷密度 ρ と電荷の速さ v の積が一定，$\rho v = I$ という定常電流が与えられる．そして，各点電荷による電磁場を重ね合わせることで，電磁場が近似することなく解析的に得られるのである．以下がその定性的な導出である．

電荷の運動を考慮するため，半直線電流を端点近傍（領域 a）とそれ以外（領域 b）の２つに分割して考える．この分割は回路の切断ではなく，運動する点電荷列を２分するものである．(5)〜(8) のように端点と電流部分に２分する方が単純で自然と考えたいところであるが，後でわかるように，この方法では端点近傍で電荷の保存則が満たされず，さらに減速の効果が考慮できないのである．

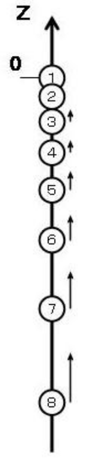

Fig.1　半直線定常電流のイメージ

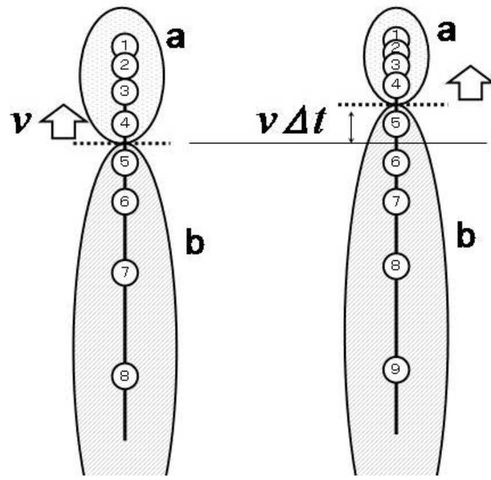

Fig.2　半直線定常電流の切断

る．Fig.2 はこの分割のイメージで，左図の 4 個の点電荷（領域 a）とそれ以外（領域 b）への分割が，微小時間 Δt で右図へと変化しているのを表わしている．領域 b が膨張し，領域 a を押し縮め，境界が点電荷とともに速さ v で移動するのである．領域 a は総電荷が変化せずに縮むことが，後の考察で重要になる．

この切断を端点に十分近い点で行い，それぞれの領域を源とする電磁場の考察を行う．つまり，切断面を $z = -\epsilon$ とし，全ての計算の後に $\epsilon \to 0$ の極限操作を行うことを前提とする．ϵ は十分小さいとする．

まず電場を考察する．領域 a の各点電荷はほとんど運動していないので（$v \approx 0$），静電荷と同等である．すなわち，領域 a による電場は静電場であり変位電流は

$$\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_a}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

となる．領域 b は定常電流によって単位時間当たり I の電荷が端点近傍で増加する．これは Fig.2 の微小時間 Δt で領域 b の点電荷が一つ分増加し領域 a を侵食したことに対応するものである．したがって領域 b による変位電流は

$$\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_b}{\partial t} = \frac{I}{4\pi} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{12}$$

となる．これは鈴木論文と兵頭論文が (8) のように端点による効果として解釈したものであるが，そうではなく，端点に流れ込む全電荷の効果なのである．

ここで，領域 b の電荷保存が気になるかもしれないが，次のようになんら問題はない．すなわち，充分遠いところに電荷が溜まっていて，そこから電荷が流れ込んで来ているとすれば電荷保存則は満たされ，また，電荷の変化は十分遠いところなのでその影響を無視することができる．

次に磁場を考察する．領域 a は上に述べたようにほとんど静電荷なので，これによる磁場は

$$\boldsymbol{B}_a = 0. \tag{13}$$

領域 b による磁場は，運動する点電荷による磁場を重ね合わせることで，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_b(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{-\epsilon} dz \Bigg(& \frac{\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{r} - z\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{r} - z\boldsymbol{k}|^3} \\ & + \frac{d}{dz}\left(\frac{\boldsymbol{v}/c \times (\boldsymbol{r} - z\boldsymbol{k})}{\alpha |\boldsymbol{r} - z\boldsymbol{k}|^2} \right) \Bigg)\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる[7]．ここで，

$$\alpha = 1 - \frac{\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r} - z\boldsymbol{k})}{c |\boldsymbol{r} - z\boldsymbol{k}|}, \tag{15}$$

積分の上限 $z = -\epsilon$ は電流を切断する面である．第 2 項は領域 b の表面の速さに依存するが次の理由で磁場に寄与しない．すなわち，原点近傍で ($\epsilon \approx 0$)，$v \approx 0$ であり，無限遠点では分母が無限大になるので，第 2 項は 0 になる．これは電荷が無限遠方から流れてきて端点近傍で減速して静止するからで，一定の速さで運動する電荷がいきなり端点で静止するような場合など条件を変えると (14) の第 2 項が残り，一般には成り立たないことに注意が必要である．したがって，(14) は全点電荷の加速の効果を厳密に考慮したにもかかわらず，ビオサバールの法則と同型で，電荷の速度分布に依存しないものになっている．もちろん，端点近傍の減速の効果も厳密に考慮したものである．奇しくも鈴木・兵頭が採用した (5) と一致し，

$$\boldsymbol{B}_b(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1 - \cos\theta}{r \sin\theta} \boldsymbol{e}_\phi. \tag{16}$$

が得られる．(9) の導出に反して，(16) の回転は次のように球対称になる．

$$\mathrm{rot} \boldsymbol{B}_b(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{17}$$

これは，(16) は電荷が存在する領域 ($r = 0 \vee \theta = \pi$) を特異とした解で，このことにより，回転が球対称になる磁場が実現するのである．(9) の導出は電流が流れる特異領域を無視しているのである．さて，領域 b の電磁場は (12) と (17) から，マクスウェル・アンペールの法則，

$$\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot} \boldsymbol{B}_b - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_b}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

を満たすことが分かる．そもそもマクスウェル方程式の解を重ね合わせた電磁場であるので，必然的な結果である．

以上から，半直線電流が磁場及び変位電流に寄与するのは，端点近傍を除いた半直線上に分布し，速度 $v(z)(-\infty < z < 0)$ で運動する電荷（領域 b の全ての電荷）であって，端点に流れ込んだ電荷ではないことが分かる．そして，半直線電流による電磁場は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{E}_b \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_a + \boldsymbol{B}_b\end{aligned} \tag{19}$$

であるので，これもマクスウェル方程式

$$\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot} \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

を満たす．決して (10) のようなマクスウェル方程式と矛盾することはない．

3. まとめ

半直線電流による電磁場を各点電荷による電磁場，マクスウェル方程式の解を重ね合わせることで，近似することなく考察し，次のことを明らかにした．

[1] 半直線電流の端点近傍の効果は磁場も変位電流もともに 0 である．

[2] 端点近傍を除いた部分 ($-\infty < z < 0$) による磁場はビオ-サバールの法則を用いたものに一致し，変位電流は球対称になるが，この電磁場はマクスウェル方程式を満たす．

以下に鈴木論文[1]および兵頭論文[2]と，本稿との違いについてまとめる．

3.1 変位電流の源

端点に電荷が溜まるので，それによる電場の変化，変

位電流を (8) と解するのが自然と思われるかもしれない．しかし，電荷が勝手に湧き出してくるのではなく，どこからか流れ込んでいるのである．このような電荷保存則を考慮しなければならないというのが，マクスウェル方程式の教えるところである．つまり，マクスウェル方程式は電荷の湧き出しや吸い込みを禁じているので，(7) や (8) を端点だけの効果として解することはあくまでも近似的なものであり，厳密な意味を持たないのである．上記のことと密接に関連したことが，最近，石原によっては重ねあわせの原理を基に議論が展開された[8)]．本稿の議論は，点電荷の運動を基礎としているので，電荷の保存は自明であり，球対称の変位電流の出所が簡単な考察から明らかになるのである．

3.2　磁場の一致

鈴木・兵頭が与えた磁場 (6) と本稿で求めた磁場 (16) とが奇しくも一致している．前者はビオ-サバールの法則を慣用したものであるが，この法則は閉回路や無限遠方から無限遠方に至る回路上で定常の場合に限り厳密なものを与えるで，(6) の真否について疑念が生じる[9)]．一方，後者の場合は点電荷の加速の効果を厳密に考慮したもので，境界の特殊性によりビオ-サバールの法則と同型のものが導かれたのである．前者の予想を後者が証明したと言えるかもしれない．

3.3　回転が球対称

(17) のように回転が球対称になることは，奇異に思えるかもしれない．そのため，兵頭はこれによる磁場を 0 とした．ただし，それは電流の流れる特異領域を無視した議論であった．実際は，この特異領域によって，回転が球対称となる磁場が実現するのである．このことは，球対称の変位電流が正当に導かれるならば，電荷保存則とアンペール・マクスウェルの法則とから推測できることである．

3.4　源の解釈

鈴木論文と兵頭論文による半直線電流の磁場 (6) と変位電流 (8) は本稿で与えた (16) と (12) に一致している．本質的な違いは源の解釈と言ってよいであろう．すなわち，鈴木・兵頭はそれぞれの源を異なるものと解し，電流および端点に溜まる電荷とした．一方，本稿は，両者とも同じ源によるもので，端点に流れ込む全ての電荷であることを明らかにしたのである．

磁場 (14) の導出については定性的な説明ができなかった．文献 7) をご覧いただきたいと思う．しかし，マクスウェル方程式を信じるならその導出は不要かもしれない．

「変位電流は磁場を創らない」説は，学校現場においても大問題なので，本稿が「半直線電流は深刻な問題を提起するものではない．」の理解の一助になればうれしく思う．

高橋憲明先生と菅野礼司先生から多くのコメントをいただき本稿で紹介した結論を得るに至った．この場を借りて両先生に厚く御礼申し上げる．

参考文献

1) 鈴木亨：物理教育**60**-1 (2012) 38-43
2) 兵頭俊夫：物理教育**60**-1 (2012) 44-51
3) 砂川重信：理論電磁気学第 2 版紀伊国屋書店 1973
4) 菅野礼司：物理教育**60**-1 (2012) 32-37
5) 斎藤吉彦：物理教育**60**-3 (2012) 209-212
6) 中村哲・須藤彰三：物理教育**60**-4 (2012) 268-273
7) 斎藤吉彦：物理教育に投稿中
8) 石原諭：物理教育**61**-4 (2013) 187-189
9) 高橋憲明：近畿の物理教育**19** (2013) 3-8

大阪市立科学館　中之島科学研究所
”Qualitative Understanding for Exact Electromagnetic Field by a Half Line Current” SAITO, Yoshihiko