ジェフィメンコ式とマクスウェル方程式

斎藤 吉彦 大阪市立科学館 中之島科学研究所 〒530-0005 大阪市北区中之島４－２－１

古典電磁気学の最も基本的な関係式はマクスウェル方程式とローレンツ力であり、電荷密度と電流密度に対応する電磁場を与える公式、ジェフィメンコ式がマウスウェル方程式を超えるものでないことを論じる。

1. はじめに

本誌の変位電流に関する議論でジェフィメンコ式* がしばしば登場している[1)–8)]。ジェフィメンコ式は源による遅延作用を陽に表しているので、この一連の議論に接した読者の中には、ジェフィメンコ式がマクスウェル方程式よりも上位の法則と考えている場合がある。実際、研究会などで高校教員の方と議論する機会があり、その様なことを経験している。マクスウェル方程式を他の法則と同等のように理解しているようで、このような場合、たとえば、ジェフィメンコ式を「マクスウェル方程式の微分形は，ある点，ある時刻において両辺が等 しいことを表しているにすぎない。しかしこれが宇宙のあらゆる点，あらゆる時刻で成り立っているので,『連立偏微分方程式を解く』という意味の”積分”を行うと，よく知られている因果的な解が導かれる。」[2)]と説かれたら、「両辺が等 しいことを表しているにすぎない」という表現は「マクスウェル方程式は下位のの法則である」という印象を与えるであろう。ジェフィメンコ式に対して崇高な意識が芽生えているかもしれない。

古典電磁気学の原理はマクスウェル方程式とローレンツ力であり、これより上位の法則はない。すべての電磁現象はこれらを根拠に考察や予想が行われる。マクスウェル方程式とローレンツ力を用いた帯電体の運動方程式は数学の公理のようなものであり、これに矛盾するような現象があれば、新たな理論が必要となる。例えば、古典電磁気学では原子は電磁波を放射して崩壊してしまうので量子力学が必要となる。上記のような印象は誤解であって、蔓延してはならないと思う。

*本稿で「ジェフィメンコ式」は、一般に「ジェフィメンコ方程式」と呼ばれているものである。後で示すように「ジェフィメンコ方程式」は電流密度と電荷密度に対して限られた場合の電磁場を与える公式であって、未知数を求めるような方程式ではない。この表式に「方程式」という単語は適切ではなく、単語の持つ印象が誤解を助長するので、本稿では「ジェフィメンコ式」と記すことにする。

本稿では、ジェフィメンコ式とマクスウェル方程式との関係を考察し、ジェフィメンコ式はマクスウェル方程式から導かれる公式であり、マクスウェル方程式が記述する電磁現象の一部を表現する公式でしかないことを論じる。

2. マクスウェル方程式とローレンツ力

電磁的現象を支配するもっとも基本的な自然法則は、マクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{3}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{4}$$

とローレンツ力

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{5}$$

である。マクスウェル方程式は電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ に対して電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ を決める方程式で、ファラデーなど が発見した法則や直感的な構想を微分方程式にまとめたものである。ここで、ϵ_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の誘電率である。(1) は電磁誘導の法則、(2) は磁力線の湧き出しや吸い込みがないこと、(3) はクーロンの法則を電場で表現したものである。(4) は電流の周囲に生じる磁場を表現したものである。左辺 第２項が変位電流と呼ばれるもので、マクスウェル方程式が電荷の保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{6}$$

を満たすように導入されたものである。

ローレンツ力は電磁場が帯電体に作用する力の密度で、電磁場を与えると帯電体の運動方程式を決定するものである。

マクスウェル方程式が電荷密度と電流密度に対して電磁場のありようを決定し、ローレンツ力が電磁場に対して電荷のありようを決定する。このように、マクスウェル方程式とローレンツ力を用いた電荷に対する運動方程式が全ての電磁現象を記述するのである。この2つが古典電磁気学の原理であり、数学の公理のようなものである。これらに矛盾するような現象があれば、新たな理論が必要となる。

3. ジェフィメンコ式の導出

ジェフィメンコ式は任意の電荷密度と電流密度に対して電磁場を与える次の表式である。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\left(\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_-)}{R^2}+\frac{1}{cR}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t_-)}{\partial t}\right)\boldsymbol{e_R}-\frac{1}{c^2R}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_-)}{\partial t}\right) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_-)}{R^2}+\frac{1}{cR}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_-)}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{e_R} \tag{8}$$

ここで、

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' \tag{9}$$

$$\boldsymbol{e_R}=\frac{\boldsymbol{R}}{R} \tag{10}$$

$$t_-=t-\frac{R}{c} \tag{11}$$

ジェフィメンコ式左辺の電磁場の時刻 t と右辺の電荷密度と電流密度の時刻 t_- との違いは、電荷密度と電流密度が離れた地点の電磁場を瞬時に決定するのではなく、光が到達するする時間だけ遅れて決定することを意味している。このようにジェフィメンコ式は源による遅延作用を陽に表しているので、このことがマクスウェル方程式を超える法則という印象を与えているかもしれない。以下では、そのような印象は誤解であることを論じる。

まず、ジェフィメンコ式の意味を明らかにするため、その導出を概観する。電磁場を電磁ポテンシャル、 スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{13}$$

で表し、この電磁ポテンシャルでマクスウェル方程式を書き換えると、マクスウェル方程式は次の線形微分方程式となる。

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{14}$$

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j} \tag{15}$$

ただし、電磁ポテンシャル (12)(13) は一意に決まらないので、その任意性を利用してローレンツ条件

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{16}$$

が課されていることに注意が必要である。多くの議論ではこの条件がいつのまにか忘れられているようである。さて、(14)(15) から形式的に次のように書くことができる。

$$\phi=-\frac{1}{\epsilon_0}\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{-1}\rho \tag{17}$$

$$\boldsymbol{A}=-\mu_0\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{-1}\boldsymbol{j} \tag{18}$$

実際、グリーン関数とよばれるものを用いれば具体的に書き下すことができて、次の2つの特解が得られるのである。

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_\pm)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_\pm)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{20}$$

ここで、

$$t_\pm=t\pm\frac{R}{c} \tag{21}$$

複合のプラスとマイナスの場合が、それぞれ先進ポテンシャルと遅延ポテンシャルとして知られているものである。遅延ポテンシャルを電磁ポテンシャルの定義 (12)(13) に代入したものがジェフィメンコ式 (7)(8) である。先進ポテンシャルは未来 t_+ の電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ が時刻 t の電磁場を決定することになるので、非物理的という理由で考察の対象から排除されている。遅延ポテンシャルはよく知られたものなので、ジェフィメンコ式はなんら問題ないと思われるかもしれないが、以下で述べるように、そうではないのである。

4. ジェフィメンコ式と電荷の保存則

マクスウェル方程式には電荷の保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{j}=0 \tag{22}$$

が内在している。すなわち、(4) の両辺に div を作用させ (3) を代入すれば、この電荷の保存則が導かれる。一方、ジェフィメンコ式は任意の電荷密度と電流密度に対する電磁場の表式なので、電荷の保存則 (22) を満たさない電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ を代入することも可能である。つまり、ジェフィメンコ式はマクスウェル方程式と矛盾する電磁場も許すのである。

前章で述べたように、遅延ポテンシャルは線型微分方程式 (14)(15) の特解ではあるが、この方程式がマクスウェル方程式と同値になるには、ローレンツ条件 (16) が必要であった。遅延ポテンシャルにはこの条件が課せられているのである。電荷の保存則 (22) を使えば、遅延ポテンシャル (19)(20) がローレンツ条件 (16) を満たすことを示しうる[9)]。したがって、ジェフィメンコ式は電荷の保存則 (22) を満たす場合にマクスウェル方程式の特解になるのである。

以降、電荷の保存則が満たされていることを前提に議論する。また、ジェフィメンコ式は特解であって一般解ではないことに注意が必要である。このことについては次章以下で議論する。

5. ジェフィメンコ式と自由場

以下では、$\rho = 0 \wedge \boldsymbol{j} = 0$ の場合のマクスウェル方程式の解や電磁ポテンシャルの解を自由場と呼ぶ。ジェフィメンコ式、あるいは遅延ポテンシャルに自由場を加えたものが一般解である。ジェフィメンコ式や遅延ポテンシャルは、その表式から明らかなように、自由場として $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$ や $\phi = \boldsymbol{A} = 0$ の自明なものしか与えない。しかし、非自明な自由場は無数にあり、実際、先進ポテンシャルと遅延ポテンシャルがそれぞれ特解なので、その差

$$\phi_0 = \phi_+ - \phi_- \tag{23}$$

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_+ - \boldsymbol{A}_- \tag{24}$$

は非自明な自由場であり、これの定数倍も自由場である。また、古典電磁気学では様々な場面で自由場が使われている。たとえば、光が真空中から水へ侵入したときの屈折と反射を求めるのに、進入波、反射波、透過波はそれぞれを平面波として扱うが、それらも自由場である。もし、ジェフィメンコ式でこの問題を扱うには平面波を生成する電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ の存在を吟味しなければならない。また、進入波を太陽光とすると、その起源は量子論的なジャンプによるものである。これを古典的な平面波と近似するにはどのようにしたらよいのであろうか。自由場を自由自在に扱えるのは、$\rho = 0 \wedge \boldsymbol{j} = 0$ の場合のマクスウェル方程式を認めるからである。

6. 自由場を含まない純粋な解

前章で述べたようにジェフィメンコ式はマクスウェル方程式の特解ではあるが、一般解ではない。ジェフィメンコ式に自由場を加えたものも特解なので特解は無数にある。これは線形微分方程式の一般的な性質で、容易に証明できることである。すなわち、ジェフィメンコ式以外にも無数の物理的な解が存在するのである。たとえば、先進ポテンシャルは非物理的なので排除されると書いたが、先進ポテンシャルは遅延ポテンシャルに (23)(24) の自由場を加えたものなので、じつは物理的である。ジェフィメンコ式が自由場を含まない純粋な解かどうかを (17)(18) のようなグリーン関数を用いた解法から判断するのは困難である。

一般に、マクスウェル方程式などの場の微分方程式は、初期条件を与えたら時間方向に積分することで解けるはずである。ほとんどの場合、解析的に積分するのは困難であるが、積分の極限操作を途中で停止した区分求積法的な処方で近似的には求めることができる。原理的にはこの解析的な積分は可能というのが古典電磁気学の大前提で、この大前提があるから区分求積法的な近似が意味を持つのである。したがって、マクスウェル方程式は次のような写像 M を与えると考えてよいであろう。

$$M : \{\rho, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0\} \mapsto \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}\} \tag{25}$$

ここで、$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ は初期条件として与えられる電磁場である。この積分処方で、源による純粋な電磁場、すなわち自由場を含まない電磁場が次のようにして求めることができる。

初期条件として無限の過去に対生成により 2 つの符合の異なる等電荷の点電荷 A と B が生成されたとし、それ以前は真空であったとすれば、初期条件の電磁場は

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{B}_0 = 0 \tag{26}$$

で与えられる。対生成の後、A が無限遠方に遠ざかり、B が現存しているとすれば A による影響は無視できる。したがって、この系による電磁場は点電荷 B による自由場を含まない純粋な電磁場と考えられる。電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ に対する自由場を含まない純粋な電磁場は、この点電荷 B による電磁場を重ね合わせることで得られる。

ジェフィメンコ式や遅延ポテンシャルがこのようにして得た解と一致すれば、これらは自由場を含まない純粋な場と考えてよいであろう。おそらくこの仮定は正しいと思われる。なぜなら、等速直線運動する点電荷による

電磁場は、静止した点電荷による電場を座標変換して得られるが、これが遅延ポテンシャルによって得られる電磁場と一致するのである。

ジェフィメンコ式は遅延作用を陽に表わすから物理的なのではない。ジェフィメンコ式は、マクスウェル方程式の無限にある特解の一つで、正当に積分することで得られる自由場を含まない純粋なものと思う。

7. 電磁波の伝搬とマクスウェル方程式

マクスウェル方程式など場の微分方程式は、任意の点における場の関係を表しているのではなく、隣接する無限小の微小領域での関係を表している。初期条件を与えると、この関係が時空を覆う無限個の微小領域での場の値を決めるのである。この精神で愚直に解くのは極めて困難なので、グリーン関数を用いた数学的な方法で遅延ポテンシャルやジェフィメンコ式が見出されたと言っていいであろう。マクスウェル方程式はこのように近傍の場の関係を表しており、磁場の空間的変化 ($\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$) がその近傍の電場の運動を誘引 ($\partial\boldsymbol{E}/\partial t$) し、電場の空間的変化 ($\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$) がその近傍の磁場の運動を誘引 ($\partial\boldsymbol{B}/\partial t$) することを表現している。すなわち、電磁場の空間的変化が隣接する微小領域に伝搬するという電磁波の伝搬機構を記述しているのである。このことは弾性体の波動との類推で理解できる。

弾性体の波動は内部の変形がその近傍の変形を励起することで変形が伝搬するものである。これを記述するのが弾性体各点における変位ベクトル $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ に対する方程式である。変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ は

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{u}^{(1)} = 0 \tag{27}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}^{(2)} = 0 \tag{28}$$

を満足する 2 成分に分解されて、それぞれの成分に対する波動方程式が

$$\left(\triangle - \frac{1}{\nu_l^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{u}^{(1)} = 0 \tag{29}$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{\nu_t^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{u}^{(2)} = 0 \tag{30}$$

である。ν_l、ν_t がそれぞれの波動の伝搬速度で、地震の波動の場合、(29) と (30) がそれぞれ縦波の p 波と横波の s 波に対応する。

電磁ポテンシャルに対する方程式 (14) (15) は弾性体の波動方程式 (29)(30) と同型である。右辺は波動を生み出す外力と考えてよいであろう。また、$\rho = \boldsymbol{j} = 0$ ならば、

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{31}$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{32}$$

となり、電磁場も同様である。電磁波の場合は弾性体のような媒質はないが、方程式が同型なので弾性体から得られるイメージで考察してもよいであろう。弾性体の場合は内部の変形がその近傍の変形を励起することで変形が伝搬する。変形は変位ベクトルの空間的な変化なので、弾性体各点における変位ベクトルのありようが変位ベクトルの時間発展を決定する。外力によって波動が励起されるが、波動の時間発展を考察するのに外力のありようは必要なく、変位ベクトルの初期条件だけでよい。方程式が同型ということで電磁ポテンシャルや電磁場を弾性体の波動に対応させると、任意の位置での電磁場や電磁ポテンシャルのありようがその近傍の電磁ポテンシャルを変動させ、この変動が四方八方へと伝播するという時間発展の描像を得る。つまり、近傍同士の場の相互作用が場の時間発展を牽引するのである。このことを記述するのが真空中の方程式である。ただし、電場と磁場はそれぞれが独立な存在ではなく、(1) と (4) のような関係にあることに注意が必要で、電場と磁場、それぞれの空間的ありようが相互の時間発展を規定している。このことによって電場と磁場がそれぞれ弾性体の波動と同型になるのである。すなわち、電場と磁場それぞれの波動の内的な構造をマクスウェル方程式が記述しているのである。

ところで、ジェフィメンコ式による一連の議論は変位電流 $\epsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ が磁場を作るかどうかを考察したものである[1)–6)]。マクスウェル方程式は電場と磁場の波動方程式 (31)(32) とは同型ではないが、上で考察したように場の空間的ありようが時間発展を決めるという論理を使うなら、変位電流が磁場を作るのでなく、磁場の空間的変化が変位電流を作ることになる。ニュートンの運動方程式もシュレディンガー方程式も同様である。前者の場合は質点に作用する力が質点の位置の時間変化を決定し、後者の場合は波動関数にハミルトニアンを演算したものが波動関数の時間変化を決定する。この問題は今後の課題とする。

8. まとめ

本稿では次の 3 点を明らかにした。

- 電荷の保存則は、マクスウェル方程式に内在するが、ジェフィメンコ式の場合は外から要請することが必要である。

- 非自明な自由場をジェフィメンコ式は扱えないが、マクスウェル方程式はこの存在を許す。
- 電磁波の伝搬の構造に関して、ジェフィメンコ式では考察できないが、マクスウェル方程式は理解を与える。

これらのことから、「ジェフィメンコ式がマクスウェル方程式より上位の法則である。」という印象は誤解であることが理解できるであろう。マクスウェル方程式とローレンツ力を用いた帯電体に対する運動方程式は古典電磁気学の公理のようなものであり、電磁現象のすべての法則はこの２つから導かれる。したがって、マクスウェル方程式とローレンツ力より上位の法則はないのである。このような物理学の体系は、古典電磁気学にかかわらず授業や教科書などで強調されるべきことで、教育者には必須の課題と思う。

　本稿は菅野礼司先生との議論をもとに著者の理解をまとめたものである。議論いただいた菅野先生に御礼申し上げる。

引用文献

1) 鈴木亨：物理教育**60**-1 (2012) 38-43
2) 兵頭俊夫：物理教育**60**-1 (2012) 44-51
3) 菅野礼司：物理教育**60**-3 (2012)213-217
4) 中村哲・須藤彰三：物理教育**60**-4 (2012) 268-273
5) 菅野礼司：物理教育**61**-2 (2013) 71-75
6) 中村哲・須藤彰三：物理教育**62**- 1 (2014) 23-29
7) 鈴木亨：物理教育**62**-2 (2014) 124
8) 菅野礼司：物理教育**62**-4 (2014) 232-236
9) 砂川重信：理論電磁気学　紀伊国屋書店 1975