

半直線電流による電磁場の厳密解

齋藤 吉彦 大阪市立科学館 中之島科学研究所 〒530-0005 大阪市北区中之島 4 - 2 - 1

電流の定義を配列間隔が無限小の点電荷列とし、端点に電荷が溜まる半直線定常電流による電磁場を、各点電荷による電磁場を重ね合わせることで求める。加速電荷による放射を近似ではなく厳密に扱う。端点近傍を除いた半直線部分に変位電流と磁場に寄与し、端点で電荷の速度と加速度がともに連続的な場合に変位電流と磁場の回転はともに球対称となる。一方、端点近傍部分による磁場と変位電流はともに 0 である。半直線電流はディラックの磁気単極子と数学的に同等であることが分かる。

1. はじめに

日本物理教育学会では電磁気学の根幹を揺るがすような問題が提起され、決着を見ないままになっている。それはアンペール・マクスウェルの法則との矛盾を導くとされる思考実験で、これを根拠に変位電流が磁場を作らないという主張がなされたのである。変位電流とは、電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式

$$\text{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\text{rot}\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}_e \quad (3)$$

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_e \quad (4)$$

の一つ、アンペール・マクスウェルの法則 (3) の左辺第 2 項の $\epsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ である。学校現場においてもアンペール・マクスウェルの法則 (3) とファラデーの誘導法則 (1) の定性的な理解として「電場の時間変化が磁場を生じ、磁場の時間変化が電場を生じる」と教えられるので、教員を不安に陥れる大問題である。

変位電流が磁場を作らないという主張は、鈴木と兵頭が定常電流によって端点に電荷が溜まる半直線電流による電磁場を論じたものである¹⁾²⁾。鈴木は無批判に「マクスウェル＝アンペールの法則に基づいて求めた磁場 H_s は見せかけの式であって」とアンペール・マクスウェルの法則を否定する議論を紹介し、兵頭は次のような自説を唱えた。「電流による磁場はビオ・サバールの法則により決定される。その一方で、端点に溜まる電荷は球対称の変位電流を生じる。回転が球対称となる場合は 0 以外に

ないので、アンペール・マクスウェルの法則 (3) よりこの変位電流による磁場が 0 になる。したがって、電流が磁場を作るのであり、変位電流は磁場を作らない。」ここで、端点の効果により「変位電流が生じる、かつ、磁場が 0」という命題に注意すべきで、これは電流が存在しないところで

$$\frac{1}{\mu_0}\text{rot}\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \neq 0 \quad (5)$$

を意味し、アンペール・マクスウェルの法則 (3) と矛盾する。鈴木の場合もこれを含意する。

このような主張に対して菅野と著者は、加速電荷の放射を考慮すべきとの指摘をしたが³⁾⁴⁾、定量的な吟味がなかったからであろうか、「兵頭論文²⁾では回転がゼロの電場が磁場を作らないことが示され⁵⁾と菅野と著者の指摘は認知されるに至っていないようである。本稿は半直線電流による厳密な電磁場の解を与えることで、この定量的な吟味を行うものである。最近、石原は重ね合わせの原理と電荷保存則による考察から、兵頭論文²⁾の論理展開の欠陥を「『変位電流由来の磁場は 0 である』との結論は証明されていない。」と指摘した⁶⁾。本稿が与える半直線電流による厳密な電磁場は、石原の指摘を具体的に示すものでもある。

ビオ・サバールの法則は次に述べるように定常電流による磁場を求める場合は厳密であるが、それ以外は近似法則である。半直線電流は、端点を除いて定常であっても、端点に電荷が溜まるので定常でない。したがって、半直線電流による電磁場は、鈴木論文¹⁾や兵頭論文²⁾のようにビオ・サバールの法則をそのまま用いるのは不相当である。電磁気学における厳密な議論はマクスウェル方程

式を原理としてなされるもので、半直線電流も例外ではない。

1820年に発見されたビオ-サバールの法則は電流素片 $I dl$ が作る磁場を

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}(l))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(l)|^3} \quad (6)$$

として与えるものである。ここで、 μ_0 , l , dl はそれぞれ真空の透磁率、電流の経路を表す座標、電流方向の線素ベクトルである。これを電流に沿って積分することで、定常電流 I による磁場が次式で与えられる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}(l))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(l)|^3} \quad (7)$$

多くの電磁気学の教科書では (7) を静的なマクスウェル方程式から導びき、これをビオ-サバールの法則と呼んでいる⁷⁾⁻¹⁰⁾。(7) はマクスウェル方程式から導かれるので、近似ではなく厳密な法則である。ただし、空間全体で系が定常であることに注意する必要がある。(6) は、閉回路あるいは無限遠方から無限遠方に至る回路上で (7) のように積分したときに、被積分関数として厳密な意味を持つが、そのままでは電荷集合体の運動という電流の本質を反映していない。2つの電流素片同士の相互作用を (6) で求めると、作用反作用則と矛盾するという非物理的な例は有名である⁷⁾。多くの教科書が、(6) ではなく (7) をビオ-サバールの法則と呼ぶのはこのためであろう。半直線電流は端点が定常でないので、ビオ-サバールの法則による磁場の考察はあくまでも近似的な議論である¹¹⁾。

本稿では、加速電荷を持つ定常電流を厳密に扱うために、定常電流を配列間隔が無限小で運動する点電荷列とみなす。このことによって、たとえ加速電荷が存在しても、定常電流による電磁場が、ビオ-サバールの法則 (7) とクーロン則で与えられる静的な電磁場と一致することが分かる。すなわち、動的なマクスウェル方程式の解の重ね合わせが、従来知られている静的な解に一致する。この命題は等速運動する点電荷列の場合に知られている演習問題¹²⁾を加速運動に拡張することで得られるもので、導出を付録 A に与えた。この導出の一部を用いることで、厳密に半直線電流による電磁場を考察することができる。以降、2章で定常電流の任意の部分領域による電磁場を与え、3章でそれを用いて半直線電流による厳密な電磁場を求め、半直線電流とディラックの磁気単極子との同等性を示し、4章で本稿のまとめを与える。付録 A では、上で述べたように2章で必要となる公式を

えるため、定常電流を配列間隔が無限小の運動する点電荷列で定義し、その定常電流による電磁場を導出する。付録 B では、磁場の回転を精緻に求めるため、遅延効果を考慮した電流に沿った座標の勾配を与える。

なお本稿では、電流はこのような点電荷列とし、定義をあえて言及する必要がある場合に、「電荷列」を付けて、例えば「電荷列定常電流」などと記す。

半直線電流の考察は端点の扱いに極めて慎重を要するため、本稿は論理的な飛躍や直感的推論を避け、数学的な厳密さを求めた。定性的な議論も与えたものの、難解かもしれない。厳密さを犠牲にして定性的議論に特化したものを別途書いているので¹³⁾、そちらも参照いただきたい。

2. 定常電流の部分区間による電磁場

運動する点電荷による電磁場はマクスウェル方程式にしたがって変動し、電荷 q の点電荷 P が軌跡 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P(t)$ を描いて動くときは次式で与えられる⁷⁾¹²⁾。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s)(1 - \beta_s^2)}{\alpha_s^3 R_s^2} + \frac{\mathbf{n}_s \times ((\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_s)}{c\alpha_s^3 R_s} \right) \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(1 - \beta_s^2)}{\alpha_s^3 R_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(\mathbf{n}_s \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_s) + \alpha_s (\dot{\boldsymbol{\beta}}_s \times \mathbf{n}_s)}{c\alpha_s^3 R_s} \right) \quad (9)$$

ここで、 ϵ_0 , c はそれぞれ真空の誘電率、光速度で、被積分関数にある各記号は以下によって定義されるものである。

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{r} - \mathbf{r}(l_s) \quad (10)$$

$$\mathbf{n}_s = \frac{\mathbf{R}_s}{R_s} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\beta}_s = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}(l_s)}{dt_s} \quad (12)$$

$$\alpha_s = 1 - \mathbf{n}_s \cdot \boldsymbol{\beta}_s \quad (13)$$

(10) および (12) の右辺の変数 l_s は (6) や (7) の変数 l と同じ電流の経路を表わす座標で、以降、電流内の電荷の位置はこの変数で与えられる。添字 s はいわゆる遅延ポテンシャルを与える電荷密度および電流密度の時空点を意味するもので、時空点 $(t_s, \mathbf{r}(l_s))$ は

$$c(t - t_s) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(l_s)| \quad (14)$$

によって与えられる。すなわち、時刻 t_s で $\mathbf{r}(l_s)$ に存在した電荷の振る舞いが電磁場の変動を引き起こし、それが光速度で空間を伝播し、時刻 t で \mathbf{r} に到達するのである。各記号の意味を簡単に書く。(10) は時刻 t_s にある点電荷の位置から、求める電磁場の位置までの変位ベクトルである。(11) はその変位ベクトルに対する単位ベクトル、(12) は時刻 t_s での点電荷の光速度を単位とした速度、(13) は運動する点電荷による電磁場を求める時に表れるものである。

大きさ I の電荷列定常電流による電磁場は、各点電荷の電磁場、(8) と (9) を重ね合わせることで、すなわち電流に沿って積分することで、次のように与えられる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dl_s \left(\frac{I}{c} \frac{d}{dl_s} \left(\frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \quad (15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int dl_s \left(\frac{d}{dl_s} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \quad (16)$$

ここで、 ρ 、 \mathbf{e}_l はそれぞれ、電荷密度、電流方向の単位ベクトルを表す。(15) および (16) の導出は付録 A に与えた。電流は閉曲線上あるいは無限遠点から無限遠点に至る曲線上を流れるので、全微分の積分は 0 になる。したがって、積分変数を l に書き換えると、磁場はビオ-サバールの法則 (7) に一致する。同様にして電場は次のようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \frac{\mathbf{R}}{R^3} dl \quad (17)$$

これは伝導電子の電荷密度が与えるクーロン場で、通常の電線の場合、正電荷のイオン分布によって相殺されるものである。

(15) および (16) は点電荷による電磁場の重ね合わせなので、電荷列定常電流の一部による電磁場をも与える。ただし、点電荷の集合体が運動しているということが重要で、図 1 のように、a から b までの電荷列定常電流の部分を考える場合は、両端はそれぞれの電荷速度 $v(a)$ 、

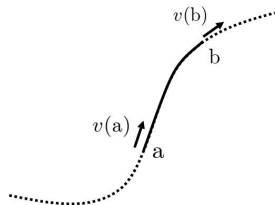


図 1 部分定常電流のイメージ

$v(b)$ で運動しているものとしなければならない。静止した回路の一部ではない。遅延効果に注意して、a から b までの部分定常電流による電磁場を表現したのが次式である。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left(\frac{I}{c} \frac{d}{dl_s} \left(\frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \\ &= \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\alpha R} \right)_{b_s} - \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\alpha R} \right)_{a_s} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left(\rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left(\frac{d}{dl_s} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\left(\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\alpha R} \right)_{b_s} - \left(\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\alpha R} \right)_{a_s} \right) \\ &\quad + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{a_s}^{b_s} dl_s \left(\frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

(18) および (19) の第 1 項は部分定常電流の両端の運動による電磁場で、第 2 項は遅延効果を考慮したクーロン則とビオ-サバールの法則である。電流内部の加速電荷の効果は完全に相殺されて境界だけに現れることに注意が必要で、次章で示すように、この命題によって半直線電流による電磁場の厳密解が一般的に与えられる。加速電荷の効果は、端点近傍で電荷が減速して静止するという速度の連続性とその時の加速度が寄与し、その他での加速運動には依存しないことが分かる。

また、電流素片による電磁場も与えることができ、(15) および (16) の被積分関数で表した次式が厳密なそれである。

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{I}{c} \frac{d}{dl_s} \left(\frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right) dl_s \quad (20)$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{d}{dl_s} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right) dl_s \quad (21)$$

これらは微小区間における (18) および (19) で、遅延効果と電流素片両端の運動を考慮したものとなっている。(20) および (21) が定常電流素片による厳密な電磁場である。

次章では (18) および (19) を用いて、半直線電流による電磁場を厳密に考察する。

3. 半直線電流による電磁場

本章では半直線定常電流による電磁場を求め、磁場と

変位電流との関係を考察する。

半直線電流を z 軸負の方向から原点へ電荷が流れ込むものとして、原点を除いて電流の大きさ

$$I = \rho(z)v(z) \quad (-\infty < z < 0) \quad (22)$$

が一定の定常電流とする。ここで v は電荷の速度で、 ρ との積が一定という条件の下、電荷は電線上の任意の場所で加速してよい。ただし、後の議論では原点近傍で減速し静止するという速度の連続性

$$\lim_{z \rightarrow 0} v = 0 \quad (23)$$

が重要で、原点近傍以外での加速の寄与はない。

さて、原点は電荷が溜まるので定常でない。このため、前章で与えた公式(18)および(19)をそのまま使うことができない。そこで、図2のように原点に十分近い点 $z = -\epsilon$ で半直線電流を2つの区間、 $a \equiv (-\infty, -\epsilon)$ と原点を含む近傍 $b \equiv (-\epsilon, 0]$ に分け、区間 a は定常なので前章で与えた公式(18)および(19)を使い、区間 b は電荷がほとんど静止しているとして、それぞれの区間による電磁場を求める。つまり、以降の議論では、電荷列電流を $z = -\epsilon$ で2分し、全ての計算の後に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行うことを前提とし、0に収束するのが明らかな項は無視する。 ϵ は十分小さいとするのである。ここで、電流を2つに切断する点 $z = -\epsilon$ は次のように電荷集合体とともに運動することに注意が必要である。

$$\dot{\epsilon} = -\dot{z} = -v(-\epsilon) \quad (24)$$

すなわち、回路を切断するのではなく、運動する点電荷列を2分するのである。この切断を端点に十分近い点で行い、それぞれの領域を源とする電磁場の考察を行う。

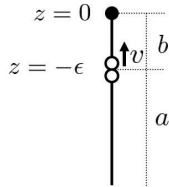


図2 半直線電流の切断

区間 a は定常電流の部分なので、(18)および(19)を用いることができ、次が区間 a による電磁場となる。

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{-\epsilon_s} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{I}{c} \frac{d}{dz_s} \left(\frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right) dz_s \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{-\epsilon_s} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{d}{dz_s} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right) dz_s \quad (26)$$

区間 a による変位電流は(25)より

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{dt_s}{dt} (-\dot{\epsilon}_s) \times \left(\rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} + \frac{I}{c} \frac{d}{dz_s} \left(\frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) \right)_{z_s = -\epsilon(t_s)} \quad (27)$$

となる。右辺第1項は $I = \rho_s v_s$ と $\mathbf{R}_s \approx \mathbf{r}$ から有限の値で球対称になることが推測できる。右辺第2項は $\dot{\epsilon}_s \approx 0$ なので変位電流に寄与しないように見えるが、 $d\boldsymbol{\beta}_s/dz_s$ の扱いに注意が必要である。以下に示す厳密な導出により、

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial t} = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_{-0})}{cr^3} \right) \quad (28)$$

が得られる。ここで、 $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{-0} \equiv \lim_{z \rightarrow -0} \dot{\boldsymbol{\beta}}$ である。

次が厳密な(28)の導出である。右辺の dt_s/dt は(14)の両辺を t で微分し整理すると、

$$\frac{dt_s}{dt} = \frac{1}{\alpha_s} \quad (29)$$

(13)(23)より

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{dt_s}{dt} = 1 \quad (30)$$

となるので、(22)(23)(24)より、(28)右辺の第1項が得られる。これは図2の区間 a の全電荷の変化からも理解できる。すなわち、境界 $z = -\epsilon$ の移動により原点近傍で電荷が単位時間当たり I 増加するのである。(27)の右辺第2項は

$$\lim_{z \rightarrow 0} \dot{v} \neq 0 \quad (31)$$

の場合、

$$v \frac{dv}{dz} = v \frac{dt}{dz} \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (32)$$

より、 $\dot{\epsilon}_s d\boldsymbol{\beta}_s/dz_s$ が0に収束しないので、(28)右辺の第2項となる。この項は例えば、

$$v = v_0(1 - \sin \omega t) \quad (33)$$

$$\dot{v} = -v_0 \omega \cos \omega t \quad (34)$$

のように $t = \pi/2\omega$ で電荷が静止する場合は0であり、等加速度運動で端点に静止する場合は有限な値となる。

区間 a による磁場(26)は $\lim_{z \rightarrow -\infty} R = \infty$ なので

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon_s} dl_s \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} + \left(\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\alpha R} \right)_{z_s = -\epsilon(t_s)} \right) \quad (35)$$

(23) より $\lim_{z \rightarrow 0} \beta = 0$ なので、第2項は0になりビオ-サバールの法則(6)を用いたものそのものになる。ただし、回転を演算する時は後で述べるように第2項は無視できない。さて、積分を実行したのが次式である。

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \quad (36)$$

端点近傍で各点電荷は減速による加速運動で電磁波を放射するので、この結果は奇異に思えるかもしれない。しかし、それぞれの電磁波が重ね合わさって定常な変位電流と磁場になるというのが上の計算結果が教えるところである。

奇しくも鈴木・兵頭がビオ-サバールの法則(6)を慣用して与えた磁場¹⁾²⁾と一致するが、(36)が得られたのは電荷が無遠方から流れてきて端点近傍で減速して静止する($\lim_{z \rightarrow 0} v = 0$)という条件によるもので、この条件があるから(35)の第2項が0に収束する。一般に定常電流は電荷速度が一定というのが暗黙の了解であろうが、このような場合は(36)を得ることはできない。なぜなら、電荷が端点でいきなり静止するので、(35)の第2項が0に収束することなく磁場に寄与するのである。

さて、(36)の回転は次のように球対称となる。

$$\text{rot} \mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (37)$$

ただし、(36)から分かるように、(37)は電荷が存在する領域($r = 0 \vee \theta = \pi$)を特異領域とした解である。このことにより、回転が球対称となる磁場が実現するのである。これは80年以上も前にディラックが提唱した磁気単極子と全く同じで、(36)と同型のベクトルポテンシャル解が“This solution is valid at all points except along the line $\theta = \pi$ ”という条件で与えられている¹⁴⁾。それは、球対称の磁場 \mathbf{B}_{mp} に対して、次の関係式

$$\text{rot} \mathbf{A}_{mp} = \mathbf{B}_{mp} \quad (38)$$

を満たすベクトルポテンシャル \mathbf{A}_{mp} の解である。 \mathbf{A}_{mp} は、磁気単極子を無限に長い線状の棒磁石の端点とすることで、この棒磁石を構成する各磁気双極子 $d\mathbf{m}$ によるベクトルポテンシャル、(6)と同型の

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{m}(l) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}(l))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(l)|^3} \quad (39)$$

を重ね合わせたもので与えられ¹²⁾、それは(35)の右辺第1項と同型であり、無限に長い棒磁石が存する線状の領域が特異となるのである。

ここで次のことに注意が必要である。(27)右辺の第2

項と同様、端点近傍で電荷の加速度が有限の値を持つなら(35)右辺の第2項は無視できなくて、 $d\beta/dz$ を含む項が有限になる。付録Bに与えた公式を使うと

$$\text{rot} \mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\beta}_{-0})}{cr^3} \right) \quad (40)$$

が得られる。この補正項と(28)右辺の第2項は、端点で電荷の加速度が連続でないことによる放射と考えられる。すなわち、電荷を減速させるための力が端点でいきなり消失した時の電荷の応答による放射である。ただし、これらの補正はアンペール・マクスウェルの法則(3)に支障をきたすものではなく、静的な磁気双極子の列を源とするディラックの磁気単極子には現れないものである。

(28)と(40)より、区間 a による電磁場はマクスウェル方程式、

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B}_a - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial t} = 0 \quad (41)$$

を満たし、決して鈴木・兵頭の論文¹⁾²⁾が含意する(5)とはならない。そもそもマクスウェル方程式の解を重ね合わせた電磁場なので、必然的な結果である。

次に、端点近傍による電磁場を考察する。区間 b の電荷

$$Q \equiv \int_{-c}^0 \rho_s dz_s \quad (42)$$

は端点に溜まった電荷も含んだもので、図2から明らかのように、端点に凝縮されるだけである。したがって、時間的に一定で、 ϵ が十分小さいことおよび(23)から、端点($z = 0$)の近傍でほとんど静止した電荷分布となる。ゆえに、これによる電場は静的なクーロン場

$$\mathbf{E}_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (43)$$

となり、区間 b による変位電流は

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial t} = 0 \quad (44)$$

となる。電荷がほとんど動かないので磁場は

$$\mathbf{B}_b = 0 \quad (45)$$

となる。ここで、区間 b では電荷密度 $\rho = I/v$ が無限大になるので、たとえ電荷の変動がわずかであってもその効果が気になる場所である。しかし、区間 b で運動している電荷は十分小さいので、そのような効果は無視で

きる。実際、区間 b で運動している電荷

$$Q_m(\epsilon) \equiv \int_{-\epsilon}^{-0} \rho_s dz_s \quad (46)$$

は、電荷が $z = -\epsilon$ から原点に達するまでに要する時間を t_ϵ とすると、時間 t_ϵ の間に $z = -\epsilon$ から流入する電荷に等しいので、

$$Q_m(\epsilon) = t_\epsilon I \quad (47)$$

となる。 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} t_\epsilon = 0$ なので

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_m(\epsilon) = 0 \quad (48)$$

となる。

以上から、半直線電流が磁場及び変位電流に寄与するのは、端点近傍を除いた半直線上に分布し速度 $v(z)$ ($-\infty < z < 0$) で運動する電荷であって、端点に流れ込んだ電荷ではないことが分かる。そして、半直線電流による電磁場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \end{aligned} \quad (49)$$

であるので、これはマクスウェル方程式

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (50)$$

を満たす。

ここで、半直線電流とディラックの磁気単極子との同等性について強調しておく。すなわち、半直線電流による球対称の変位電流と磁場は運動する電荷を源とするものであり、ディラックの磁気単極子による球対称の磁場とベクトルポテンシャルは静的な磁気双極子を源とするものである。両者の数学的な構造は一致しており、前者は静的な対象を扱ったディラックの結論を動的なものに一般化したものである。電荷の動的効果として (28) および (40) の右辺第2項のような補正が必要となる場合がある。

4. まとめ

電荷列半直線電流による電磁場を近似することなく厳密に考察することにより、半直線電流による事象はアンペール・マクスウェル方程式と矛盾することがなく、電磁気学の根幹を揺るがすような、そして教育現場を不安に陥れるような問題ではないことを明らかにした。すなわち、各点電荷による電磁場、マクスウェル方程式の解を重ね合わせたものを半直線電流による電磁場として与

え、その結果、次のことを明らかにした。

- [1] 半直線電流の端点近傍（電荷が凝縮する端点を含んだ十分小さな区間）の効果は磁場も変位電流もともに0である。
- [2] 点電荷が運動する領域、端点近傍を除いた部分 ($-\infty < z < 0$) による磁場はビオ・サバールの法則 (6) を用いたものに一致し、電磁場はマクスウェル方程式を満たす。特に電荷の加速度が端点で0に収束する場合は磁場の回転も変位電流もともに球対称となる。
- [3] 半直線電流とディラックの磁気単極子との数学的構造は同じで、運動する電荷を源とする球対称の変位電流と磁場とが、磁気双極子を源とする球対称の磁場とベクトルポテンシャルとにそれぞれが対応する。ただし、前者には電荷が運動するという動的効果による補正が生じる場合がある。

端点は運動しない点電荷の集まりなので、磁場と変位電流に寄与しないことは理にかなった結果であろう。また、端点近傍を除いた部分による電磁場がマクスウェル方程式を満たすことは、その構成要素である各点電荷による電磁場の重ね合わせであることから自明であろう。変位電流が球対称になるのは (30) の下に書いたように簡単な考察から理解できる。そして、磁場の回転が球対称になることは、一見奇異に思えるかもしれないが、(38) が与えるディラックの磁気単極子によるベクトルポテンシャルと同様で、電荷の存在する領域を特異領域とすることで実現している。これは、変位電流が球対称であるので、マクスウェル方程式から理にかなった帰結と言える。ただし、端点で電荷の加速度がいきなり0になる場合、すなわち電荷に作用する力が端点でいきなり消失する場合は放射による補正項が生じる。この補正もマクスウェル方程式を満たすことは上記と同じ理由で自明のことであろう。

企画「変位電流とは何か」の中で半直線電流による磁場と変位電流が議論され、鈴木と兵頭によって本稿で求めた (28) の右辺第1項および (36) に一致したものが記述されている¹⁾²⁾。本稿との本質的な違いは電磁場の起源の解釈で、鈴木・兵頭は球対称の変位電流と軸対称の磁場それぞれの起源を端点に溜まる電荷および電流とし、異なった起源によるものと解釈している。一方、本稿は、(25) と (26) から分かるように、両方とも無限遠方から端点までの間で運動する全ての電荷、すなわち同一の電荷集合体の運動を起源とする。本稿の結論は、半直線電流の電磁場を、加速電荷の放射を厳密に考慮したことにより得られたものである。石原が指摘したように兵頭は端

点での電荷保存則を無視したために⁶⁾、端点による電磁場が(5)というようなマクスウェル方程式と矛盾したものを採用せざるをえなかったのであろう²⁾。本稿は点電荷の運動を基礎としているので、電荷保存則を満たしていることは明らかである。

著者は文献4)で、加速電荷による放射の効果があるという信念で、「アンペールの法則やビオ-サバールの法則は厳密な法則ではなく、近似法則」と主張し、そもそも球対称な変位電流は存在しないし、半直線電流による磁場もビオ-サバールの法則で求めたものとは異なると考えていた。もし球対称な変位電流が存在したら、磁場の回転が球対称となることをマクスウェル方程式が要求することになる。しかし、数学的にはそのような磁場の解は存在しない。この矛盾は、加速電荷による放射を考慮することで解けるはずで、それを試みたところ本稿の結論に至った。すなわち、電荷が半直線電流の端点近傍で減速し、速度および加速度が連続的に0になる限り($\lim_{z \rightarrow 0} v = 0 \wedge \lim_{z \rightarrow 0} \dot{v} = 0$)、加速の仕方に依存することなく球対称な変位電流とビオ-サバールの法則で求めたのと同じ磁場を得た。また、回転が球対称となる磁場は存在しないと信じていたが、実際は既に知られていた磁場(36)の回転が(37)のように球対称になる。ただし、この解は電荷が存在する領域($r = 0 \vee \theta = \pi$)を除いた真空解である。電荷が存在する領域を特異領域として避けることが、この解が存在する理由である。以上のように、文献4)の間違いを訂正させていただきたい。ただし、この訂正は文献4)の骨子、半直線電流においても「荷電粒子の運動が相対論的なら、マクスウェル方程式を満足する電磁場が一意的に求められる。」に抵触するものではない。本稿では、加速電荷による放射を考慮することで、この骨子を確認した。

高橋憲明先生と菅野礼司先生から草稿段階から多くのコメントをいただき本稿を仕上げることができた。この場を借りて両先生に厚く御礼申し上げる。牲川章先生には再々投稿の段階で議論をしていただき、球対称変位電流とディラックの磁気単極子の磁場との同等性に気づくことができた。このことにより、本稿は説得力を増したと思う。ここに感謝の意を表す。また、匿名の査読者には、端点における加速度の扱いに関して著者が見落としていた部分を指摘いただいた。このことによって厳密な議論が完成したと思う。ここに謝意を表す。

付録 A

電荷列定常電流による電磁場を、各点電荷による電磁

場を重ね合わせることで導出する。

電荷 q の点電荷列が任意形状の電線上にあるとし、各点電荷を $\{j\}$ で番号付けする。電線に沿った座標を l とし、電線上の位置 l での点電荷の速度を $v(l)$ とする。定常電流を考えるので $v(l)$ の時間的な変化はないものとする。文献12)は等速運動の場合を14章に演習問題として与えているが、これを加速運動の場合に一般化するのである。

電流の大きさが電線上いたるところで一定になるように、すなわち定常電流になるように、点電荷配列の間隔を $v(l)\Delta t$ とし、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で定常電流を定義する。電荷密度は $q/(v(l)\Delta t)$ なので、電流の大きさはこれに点電荷の速度をかけることで

$$I = \frac{q}{\Delta t} \quad (51)$$

となる。 $\Delta t \rightarrow 0$ と同時に $q \rightarrow 0$ とすることで、速度分布 $v(l)$ に依存しない定常電流 I が与えられる。

次に定常電流が作る磁場を考える。各点電荷 j の位置を $l_j(t)$ とすると、配列間隔が $v(l)\Delta t$ なので、

$$l_j(t) - l_{j-1}(t) = v(l_j(t))\Delta t \quad (52)$$

点電荷 j が、時刻 t で位置 \mathbf{r} に作る磁場を $q\mathbf{B}_j^{(u)}(\mathbf{r}, t)$ とすれば (u は単位電荷あたりの量を表す添字)、点電荷列の作る磁場は(51)より、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\Delta t}(\mathbf{r}, t) &= \sum_j q\mathbf{B}_j^{(u)}(\mathbf{r}, t) \\ &= \sum_j I \frac{v(l_j(t))\Delta t}{v(l_j(t))} \mathbf{B}_j^{(u)}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (53)$$

この連続極限をとったものが、定常電流が与える磁場

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{B}_{\Delta t}(\mathbf{r}, t) \\ &= \int dl \frac{I}{v(l)} \mathbf{B}_l^{(u)}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (54)$$

である。ただし、(53)(54)の時刻 t には注意が必要で、(9)から分かるように、いわゆる遅延効果を考慮しなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{dl}{v(l)} \left(\frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(1 - \beta_s^2)}{\alpha_s^3 R_s^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(\mathbf{n}_s \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_s) + \alpha_s(\dot{\boldsymbol{\beta}}_s \times \mathbf{n}_s)}{c\alpha_s^3 R_s} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

の右辺の被積分関数の括弧内は l_s の関数で、 l_s は変数 l と \mathbf{r} によって決まる変数である。

ここで、被積分関数は l_s と l とが混在しているので、

積分変数を l_s に変換することを試みる。点電荷が時刻 t から微小時間 dt を運動したとすると、微小変位の関係は

$$|dr_P(t)| = \frac{v(t)}{v(t_s)} \alpha_s |dr_P(t_s)| \quad (56)$$

これは、(14) の微小変化

$$c(dt - dt_s) = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P(t_s)) \cdot d\mathbf{r}_P(t_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P(t_s)|} \frac{dt_s}{dt_s} \quad (57)$$

の両辺に $v(t)$ をかけて整理することで得られる。(56) は l_s の微小変化に対する l の微小変化

$$dl = \frac{v(l)}{v(l_s)} \alpha_s dl_s \quad (58)$$

である。(58) だけが文献 12) の演習問題の一般化、すなわち電荷の加速運動を扱うのに必要なものである。

(58) を使うと (55) は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{dl_s}{v(l_s)} \alpha_s \left(\frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(1 - \beta_s^2)}{\alpha_s^3 R_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s)(\mathbf{n}_s \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_s) + \alpha_s (\dot{\boldsymbol{\beta}}_s \times \mathbf{n}_s)}{c\alpha_s^3 R_s} \right) \quad (59)$$

となり、積分変数が l_s で被積分関数が l_s だけの関数になる。

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{dl}{dt} \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dl} = v \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dl} \quad (60)$$

を使うと、(59) は少々面倒な計算の結果*

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int dl_s \left(\frac{d}{dl_s} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}_s \times \mathbf{n}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \frac{\mathbf{e}_{l_s} \times \mathbf{R}_s}{R_s^3} \right) \quad (61)$$

ここで \mathbf{e}_{l_s} は電流方向の単位ベクトルである。電流は閉曲線上あるいは無限遠点から無限遠点に至る曲線上を流れるので、全微分の積分は 0 になる。積分変数を l に書き換えると、時間依存性がなくなり、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{e}_l \times \mathbf{R}}{R^3} dl \quad (62)$$

となり、ビオ-サバールの法則 (7) と一致する。電場も同様に求めることができ、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dl_s \left(\frac{I}{c} \frac{d}{dl_s} \left(\frac{\mathbf{n}_s - \boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s} \right) + \rho_s \frac{\mathbf{R}_s}{R_s^3} \right), \quad (63)$$

ここで ρ は電荷密度である。全微分の積分は 0 になる

*遅延ポテンシャルを積分し微分演算をすれば簡単に同値の結果を得る。ただし、積分の表面の変化に注意して微分しなければ、後の議論に必要な表面項を導出できない。本稿では、論理展開の単純さを優先するために、遅延ポテンシャルの概念を使わずに点電荷による電磁場 (8)(9) を天下一的¹⁾に与えて積分した。

ので、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \frac{\mathbf{R}}{R^3} dl \quad (64)$$

となり、クーロン則による電場に一致する。

付録 B

運動する点電荷が与える電磁場は (8)(9) で与えられるが、この右辺は \mathbf{r} , $\mathbf{r}(l_s)$, t_s の関数であり、 l_s , t_s は \mathbf{r} と t および点電荷の運動によって決まる。ここでは \mathbf{r} の変化に対する l_s の変化を与える。

(14) より

$$c(dt - dt_s) = \mathbf{n}_s \cdot (d\mathbf{r} - d\mathbf{r}(l_s)) = \mathbf{n}_s \cdot (d\mathbf{r} - \mathbf{v}_s dt_s) \quad (65)$$

x 座標に関して偏微分をとり整理すると

$$n_{sx} = -c\alpha_s \frac{\partial t_s}{\partial x} \quad (66)$$

となる。これと

$$\frac{\partial l_s}{\partial x} = \frac{\partial t_s}{\partial x} \frac{dl_s}{dt_s} = v_s \frac{\partial t_s}{\partial x} \quad (67)$$

より

$$\frac{\partial l_s}{\partial x} = -\frac{\beta_s n_{sx}}{\alpha_s} \quad (68)$$

となる。 y 座標、 z 座標に関する変換もまったく同様に求められ、

$$\text{grad}_{l_s} = -\frac{\boldsymbol{\beta}_s \mathbf{n}_s}{\alpha_s} \quad (69)$$

参考文献

- 1) 鈴木亨：物理教育 **60-1** (2012) 38-43
- 2) 兵頭俊夫：物理教育 **60-1** (2012) 44-51
- 3) 菅野礼司：物理教育 **60-3** (2012) 213-217
- 4) 斎藤吉彦：物理教育 **60-3** (2012) 209-212
- 5) 中村哲・須藤彰三：物理教育 **60-4** (2012) 268-273
- 6) 石原諭：物理教育 **61-4** (2013) 187-189
- 7) 砂川重信：理論電磁気学第 2 版，紀伊国屋書店 1973
- 8) ブランク：理論電磁気学，裳華房 1927
- 9) ランダウ：電磁気学 1，東京図書 1965
- 10) ファインマン：電磁気学，岩波書店 1969
- 11) 高橋憲明：近畿の物理教育 **19** (2013) 3-8
- 12) ジャクソン：ジャクソン電磁気学，吉岡書店 1994
- 13) 斎藤吉彦：近畿の物理教育 **20** (2014) 11-14
- 14) Dirac, P. A. M. : Proc. R. Soc. Lond, **A 133** (1931) 60-72