電荷が加速しても定常電流は電磁波を放射しない

斎藤 吉彦 *

電流の定義を配列間隔が無限小の点電荷列とし，定常電流による電磁場を計算する．電荷が加速しても電磁波を放射することはなく，一般に知られている静的な電磁場と一致する．

1. はじめに

微小円電流と磁気双極子による磁場が等価であることは，電磁気学の教科書など様々なところで述べられていて，これを疑うことなく多岐にわたる場面で用いられる．電子スピンなど原理的な議論を古典的に行う時も同様である．しかし，円電流の電荷は加速し電磁波を放射するはずである．ボーアの原子論は，原子内電子がこの放射によって円運動として安定に存在できないことから，論理の飛躍を行ったもので，量子力学の確立のための最も重要な発見のひとつである．高等学校の学習指導要領に量子論と原子の構造があるので，大学で電磁気学を履修する学生にとっては加速電荷による電磁波は常識であろう．大学の授業で円電流の磁場を扱うとき，電磁波の放射はどのように説明されているのであろう．また，直線定常電流の場合はアンペールの法則が有名で，電流 I による磁場

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{1}$$

を与える．ここで r は電流からの距離，μ_0 は真空の透磁率である．抵抗の異なる電線を結線した場合は，その近傍で電荷が加速するので電磁波が放射されるはずである．磁場は (1) のままでよいのであろうか．伝導電子の速度は極めて小さいので電磁波は無視してよいという説明があるかもしれないが，その場合には近似の度合いを示すことが必要であろう．

定常電流による磁場は，次を電流素片 $I\boldsymbol{dl}$ による磁場と定義し，これを電流の経路に沿って積分して求めることが多い．

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{dl}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(l))}{|(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(l)|^3}, \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{dl}$ と l はそれぞれ，電流方向の線素ベクトルと電流の経路を表す座標である．この場合，(2) はビオ・サバールの法則と呼ばれている．円電流による磁場もアンペールの法則もこの論理で求めらることが多いようである．(2) はアンペールの法則が発見されたのと同じ年，1820 年に発見されたものである．当時は電磁波の概念がなかったので，このような磁場の導出は理にかなったものとして信じられていたであろう．ただし，2 つの電流素片間の相互作用を (2) と電流との作用として求めると作用反作用の法則が満たされないので，このことは問題であったようである[1]．

電磁波を放射するか否かは，(2) をよりどころに考察するのではなく，マクスウェル方程式による吟味が必要である．多くの電磁気学の教科書では，静的なマクスウェル方程式から定常電流による磁場が導出され，

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\boldsymbol{dl}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(l))}{|(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(l)|^3} \tag{3}$$

が与えられている[1)2)3)4)]．(3) は任意の閉回路，あるいは無限遠方から無限遠方へ至る定常電流による磁場で，(2) を電流の経路に沿って積分したものそのものである．すなわち，アンペールの時代からの方法が，マクスウェル方程式によって正当化されるのである．プランクは，(3) から (2) を電流素片が作る磁場との解釈を与え，(2) をビオサバールの法則と呼んでいる[2)]．しかし，(2) はあくまで近似的な法則で，物理的な意味が明確でないことに注意が必要である．そのため，砂川，ランダウ，ファインマンなど，多くの教科書では (3) をビオ・サバールの法則と呼んでいるのであろう[1)3)4)]．

いずれにせよ，マクスウェル方程式から (3) が得られるので，たとえ電線の各所から電磁波が放射されたとしても，定常電流である限りそれによる磁場は (3) によって与えられる．電場は電荷密度が時間変化しないのでクーロン則によって与えられるものになる．通常は伝導電子と金属イオンの電荷が相殺して電場は 0 である．したがっ

---

*大阪市立科学館 中之島科学研究所

て，定常電流は電磁波を放射しない，すなわち，電線各所から放射される電磁波は相殺されることが結論付けられるのである．電磁磁気学の教科書は，定常電流は電磁波を放射しないことを暗黙のうちちに結論しているのである．

論理的にはこれが正しい結論であろうが，本当に電磁波が出ないのかどうか非常に気になるところである．そこで思いつくのが，定常電流を点電荷群の連続極限として定義し，点電荷による電磁場を積分することで，上記のことを確認することである．文献 6) の 14 章に，電荷が等速運動する場合にこの確認をする演習問題が与えられている．本稿はこの演習問題を一般化し，電荷が加速運動する場合も含んだ解を与えるものである．

以下では，2 章で運動する点電荷による電磁場を与え，3 章で電流を点電荷列の連続極限として定義し，点電荷による電磁場を任意の電流の経路に沿って積分することで，定常電流による電磁場を与える．4 章で本稿のまとめを与える．

2. 運動する点電荷による電磁場

点電荷が運動すると電磁場はマクスウェル方程式にしたがって変動する．電荷 q の点電荷 P が軌跡 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t)$ を描いて動くときは次式で与えられる[1]．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(\boldsymbol{n}_s-\boldsymbol{\beta}_s)(1-{\boldsymbol{\beta}_s}^2)}{{\alpha_s}^3{R_s}^2}+\frac{\boldsymbol{n}_s\times((\boldsymbol{n}_s-\boldsymbol{\beta}_s)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}_s)}{c{\alpha_s}^3R_s}\right), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{(\boldsymbol{\beta}_s\times\boldsymbol{n}_s)(1-{\boldsymbol{\beta}_s}^2)}{{\alpha_s}^3{R_s}^2}+\frac{(\boldsymbol{\beta}_s\times\boldsymbol{n}_s)(\boldsymbol{n}_s\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}_s)+\alpha_s(\dot{\boldsymbol{\beta}}_s\times\boldsymbol{n}_s)}{c{\alpha_s}^3R_s}\right), \tag{5}$$

ここで ϵ_0 は真空の誘電率，c は光速度で，

$$\boldsymbol{R}_s=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t_s), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{n}_s=\frac{\boldsymbol{R}_s}{R_s}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\beta}_s=\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t_s)}{dt_s}, \tag{8}$$

$$\alpha_s=1-\boldsymbol{n}_s\cdot\boldsymbol{\beta}_s. \tag{9}$$

また，点電荷の時空点 $(t_s,\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t_s))$ は，

$$c(t-t_s)=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t_s)| \tag{10}$$

によって与えられるもので，いわゆる遅延ポテンシャルを与える電荷密度および電荷の時空点である．添字 s はこの時空点における量であることを表わす．各記号の意味を簡単に書く．(6) は時刻 t_s にある点電荷の位置から求める電磁場の位置までの変位ベクトル，(7) はその変位ベクトルに対する単位ベクトル，(8) は時刻 t_s での点電荷の速度で光速度を単位としたもの，(9) は遅延ポテンシャルに点電荷による電荷密度と電流密度

$$\rho_q=q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t)) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{i}_q=q\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}}(t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t)) \tag{12}$$

を代入し，微分演算によって電磁場を求める過程で表れるものである．

3. 点電荷列連続極限による電磁場

電荷 q の点電荷列が任意形状の電線上にあるとし，各点電荷を $\{j\}$ で番号付けする．電線に沿った座標を l とし，電線上の位置 l での点電荷の速度を $v(l)$ とする．定常電流を考えるので $v(l)$ の時間的な変化はないものとする．電流の大きさが電線上いたるところで一定になるように，すなわち定常電流になるように，配列間隔を速度に比例したものとする．すなわち，点電荷配列の間隔を $v(l)\Delta t$ とし，$\Delta t\to 0$ の極限で定常電流を定義する．電荷密度は $q/(v(l)\Delta t)$ なので，電流の大きさはこれに点電荷の速度をかけることで

$$I=\frac{q}{\Delta t} \tag{13}$$

となる．$\Delta t\to 0$ と同時に $q\to 0$ とすることで，速度分布 $v(l)$ に依存しない定常電流 I が与えられる．実際の電流は，各伝導電子が金属結晶の格子間隔と同程度の距離を置いて移動しているものであろうが，この定義は，各伝導電子を連続体とし，電流を隙間のない一次元の連続体とした理想化されたモデルを与える．格子間隔レベルになると量子論的な扱いが必要になるので，質点イメージよりこの連続体イメージの方が現実に近いかもしれない．

次に定常電流が作る磁場を考える．各点電荷 j の位置を $l_j(t)$ とすると，配列間隔が $v(l)\Delta t$ なので，

$$l_j(t)-l_{j-1}(t)=v(l_j(t))\Delta t. \tag{14}$$

点電荷 j が，時刻 t で位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場を $q\boldsymbol{B}_j^{(u)}(\boldsymbol{r},t)$ とすれば（u は単位電荷あたりの量を表す添字），点電荷列

の作る磁場は (13) より，

$$\boldsymbol{B}_{\Delta t}(\boldsymbol{r},t) = \sum_j q\boldsymbol{B}_j^{(u)}(\boldsymbol{r},t)$$
$$= \sum_j I\frac{v(l_j(t))\Delta t}{v(l_j(t))}\boldsymbol{B}_j^{(u)}(\boldsymbol{r},t). \tag{15}$$

これの連続極限をとったものが，定常電流が与える磁場である．すなわち，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{B}_{\Delta t}(\boldsymbol{r},t,)$$
$$= \int dl\frac{I}{v(l)}\boldsymbol{B}_l^{(u)}(\boldsymbol{r},t). \tag{16}$$

ただし，(15)(16) の時刻 t には注意が必要で，(5) から分かるように，いわゆる遅延効果を考慮しなければならない．すなわち，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c}\int\frac{dl}{v(l)}\Bigg(\frac{(\boldsymbol{\beta}_s\times\boldsymbol{n}_s)(1-\boldsymbol{\beta}_s^2)}{\alpha_s^3R_s^2}$$
$$+\frac{(\boldsymbol{\beta}_s\times\boldsymbol{n}_s)(\boldsymbol{n}_s\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}_s)+\alpha_0(\dot{\boldsymbol{\beta}}_s\times\boldsymbol{n}_s)}{c\alpha_s^3R_s}\Bigg) \tag{17}$$

の右辺の被積分関数の括弧内は l_s の関数で，l_s は変数 l と $\boldsymbol{r}$ によって決まる変数である．

ここで，被積分関数は l_s と l とが混在しているので，積分変数を l_s に変換することを試みる．点電荷が時刻 t から微小時間 dt を運動したとすると，微小変位の関係は

$$|dr_{\mathrm{P}}(t)| = \frac{v(t)}{v(t_s)}\alpha_s|dr_{\mathrm{P}}(t_s)|. \tag{18}$$

これは，(10) の微小変化

$$c(dt-dt_s) = -\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t_s))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t_s)|}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t_s)}{dt_s}dt_s \tag{19}$$

の両辺に $v(t)$ をかけて整理することで得られる．(18) は l_s の微小変化に対する l の微小変化

$$dl = \frac{v(l)}{v(l_s)}\alpha_s dl_s \tag{20}$$

である．これだけが 6) の演習問題を一般化するのに必要なものである．(20) を使うと (17) は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c}\int\frac{dl_s}{v(l_s)}\alpha_s\Bigg(\frac{(\boldsymbol{\beta}_s\times\boldsymbol{n}_s)(1-{\boldsymbol{\beta}_s}^2)}{{\alpha_s}^3R_s^2}$$
$$+\frac{(\boldsymbol{\beta}_s\times\boldsymbol{n}_s)(\boldsymbol{n}_s\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}_s)+\alpha_s(\dot{\boldsymbol{\beta}}_s\times\boldsymbol{n}_s)}{c{\alpha_s}^3R_s}\Bigg) \tag{21}$$

となり，積分変数が l_s で被積分関数が l_s だけの関数になる．さらに，定常であるので連続極限の結果，既に (16) で時間に依存しないものとなっている．

さて，

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{dl}{dt}\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dl} = v\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dl} \tag{22}$$

を使うと，(21) は少々面倒な計算の結果*，次のように変形できる．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int dl_s\Bigg(\frac{d}{dl_s}\Bigg(\frac{\boldsymbol{\beta}_s\times\boldsymbol{n}_s}{\alpha_s R_s}\Bigg)$$
$$+\frac{\boldsymbol{e}_{l_s}\times\boldsymbol{R}_s}{{R_s}^3}\Bigg), \tag{23}$$

ここで $\boldsymbol{e}_l$ は電流方向の単位ベクトルである．電流は閉曲線上あるいは無限遠点から無限遠点に至る曲線上を流れるので，全微分の積分は 0 になる．したがって，積分変数を l に書き換えると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}_l\times\boldsymbol{R}}{R^3}\,dl \tag{24}$$

となり，(3) と一致する．電場も同様に求めることができて，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dl_s\Bigg(\frac{I}{c}\frac{d}{dl_s}\Bigg(\frac{\boldsymbol{n}_s-\boldsymbol{\beta}_s}{\alpha_s R_s}\Bigg)$$
$$+\rho_s\frac{\boldsymbol{R}_s}{{R_s}^3}\Bigg), \tag{25}$$

ここで ρ は電荷密度である．全微分の積分は 0 になるので，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dl. \tag{26}$$

以上のように，定常電流を運動する点電荷列の連続極限として定義した場合，その電磁場は一般によく知られた静的なマクスウェル方程式の解と一致するのである．

4. おわりに

定常電流による電磁場が静的なマクスウェル方程式によって与えられることは，系が時間的な変化をしないので自明であろう．多くの教科書で紹介されていることである．別解として，運動する電荷による電磁場，すなわち動的なマクスウェル方程式の解を重ね合わせることでも得られるはずである．本稿は，この「はず」を愚直に確認したものである．愚直なので，マクスウェル方程式が電磁気学の原理であることを体得するのに効果的な例題になるであろう．ぜひ，授業や教科書などでこのこと

*遅延ポテンシャルを積分し微分演算をすれば簡単に同値の結果を得る．ただし，積分の表面の変化に注意して微分しなければ，次章の最後に触れる半直線電流による電磁場を考察するために必要な表面項を導出できない．本稿では，論理展開の単純さを優先するために，遅延ポテンシャルの概念を使わずに点電荷による電磁場 (4)(5) を天下り的に与えて積分した．

を強く印象付けていただきたいと思う.

このように思うのは，マクスウェル方程式が電磁気学の諸法則と同列あるいは下位の法則とする議論が少なくないからである．高橋はそのような誤解や曲解がしばしば見られると注意を喚起している[5)]．たとえば，ビオ・サバールの法則をインターネット検索すると，1820 年代に発見された電流素片による磁場 (2) が厳密なものと思わせるものがほとんどで,「厳密なものはマクスウェル方程式から導出される (3) である」というような記述は見当たらないのである．また，大学受験ではマクスウェル方程式が必要とされないので，高校教員はそれを知らずに教壇に立つことができる．しかし，マクスウェル方程式が電磁気学の原理であることを背景に授業を展開していただきたいものである．本稿の結果は高校教員にもいい刺激になるであろう．将来の高校教員のためにも，ぜひ，大学の授業などで取り上げていただきたいと思うのである．

ところで，(23) および (25) はモデルの設定に依存しない強力な公式である．たとえば,「物理教育」第 60 巻の企画「変位電流とは何か」で，変位電流が磁場を作るか否かが議論されていたが，次のようにブレークスルーを可能にする．この企画では，端点に電荷が溜まる半直線定常電流が思考実験として用いられ，議論の根拠とされた[7)8)]．この企画において，端点近傍で電荷が減速する効果を考慮すべきとの定性的な指摘はあったものの[9)10)]，定量的な吟味がなされていないので，決着を得ないままになっている．この問題に (23) と (25) とを適用すれば，電荷の減速の仕方を設定することなく，減速の効果を厳密に考慮した電磁場の真空解が得られる．この真空解に対して，変位電流と磁場の回転はともに球対称となり，マクスウェル方程式を満たすことが分かる．マクスウェル方程式から得られた電磁場の解なので自明の帰結である．この件については，別途議論することにする[11)12)].

著者は，加速電荷の効果が出るという強い思い込みで妙な解釈を何度も繰り返した．度重なる間違いに，高橋憲明先生と菅野礼司先生から適切なコメントをいただき，紆余曲折を経て本稿の結論に至った。この場を借りて両先生に厚く御礼申し上げる．初稿では著者独自の見解を与えたが、古結尚先生との議論でその間違いに気付くことができた．ここに感謝の意を表する．また、当初、本稿の結論とその導出を「大学の物理教育」に投稿したが、その審査の過程で Jackson の演習問題の存在を知り、改訂したのが本稿である。Jackson の演習問題の存在を示してくださった匿名の査読者に感謝する。

参考文献

1) 砂川重信, 理論電磁気学, 紀伊国屋書店,1975
2) プランク, 理論電磁気学, 裳華房,1927
3) ランダウ, 電磁気学 1, 東京図書,1965
4) ファインマン, 電磁気学, 岩波書店,1969
5) 高橋憲明, 近畿の物理教育, **19**(2013)3-8
6) ジャクソン：ジャクソン電磁気学，吉岡書店 1994
7) 鈴木亨, 物理教育, **60**-1(2012)38-43
8) 兵頭俊夫, 物理教育, **60**-1(2012)44-51
9) 菅野礼司, 物理教育, **60**-1(2012)32-37
10) 斎藤吉彦, 物理教育, **60**-3(2012)209-212
11) 斎藤吉彦：近畿の物理教育, **20** (2014)11-14
12) 斎藤吉彦：物理教育に投稿中