大阪市立科学館研究報告 17, 55-58 (2007)

両替問題:10000 円は何通りの方法で両替できるか

石 坂 千 春 *

概 要

両替問題は数学オリンピックや入試にも出題される古典的な数学問題である。

今回、二千円札を使う場合と使わない場合の 10000 円の両替方法の数を計算し、比較したので報告する。二千円札を使わない場合は 181 億 5517 万 1409 通り、二千円札を使うケースを含む場合は 245 億 9737 万 3439 通りあることが分かった。

1. はじめに

ある金額を何通りの方法で両替できるか、という両替問題、または手持ちの紙幣・貨幣で何通りの支払いができるか、という支払問題は古典的な数学問題であり、日本数学オリンピックにも出題されたことがある[1]。

日常使われる現行の日本銀行券および貨幣は 10 種類;壱万円札、五千円札、弐千円札、千円札、五百円貨、百円貨、五十円貨、十円貨、五円貨、一円貨(図1)である。なお今回は五百円札や記念硬貨については考慮しない。

図1. 現行の日本の通貨は 10 種類

これらの通貨を組み合わせて 10000 円にする方法は何通りあるのであろうか?

弐千円札(以下、二千円札)を含まない場合(2章)と二千円札を使うことができる場合も含む両替方法(3章)を計算したので報告する。

2. 二千円札を含まない場合

2-1. 考え方

ある決まった金額の両替方法を網羅的に調べるためには、その金額内の最大額面通貨を使うかどうかで場合分けをし、合計金額が当該金額に合うようにそれぞれの枚数を調整すればよい。

たとえば、1円の両替方法は一円貨を1枚使う1通りしかないが、5 円の場合は五円貨を1枚使う方法と一円貨を 5 枚使う方法の2通りある。

10 円の場合は①十円貨×1枚、②五円貨×2 枚、③五円貨×1 枚+一円貨×5 枚、④一円貨×10 枚、の4通りである(図2)。

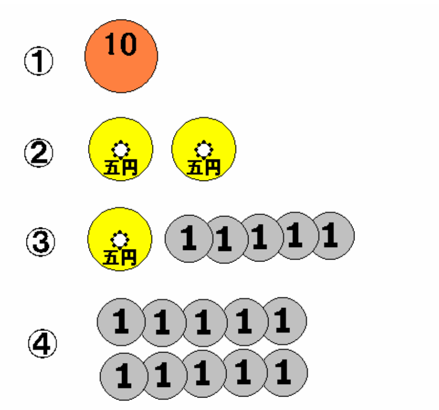

図2. 10円の両替方法は4通りある

合計金額を Y、壱万円札の使用枚数を n_{10000}、五千円札の使用枚数を n_{5000}、以下同様に通貨 x の使用枚数を n_xとすると、今回求めるのは整数方程式、

$$Y=10000\times n_{10000}+5000\times n_{5000}+\cdots+5\times n_5+1\times n_1$$

で Y=10000 を満たす解$\{n_x\}$の組み合わせ(N_Y)が何通りあるか、である。

*大阪市立科学館 学芸課
E-mail:ishizaka@sci-museum.jp

表1. 10000 円を両替する場合の紙幣・貨幣の枚数

壱万円	五千円	千円	五百円	百円	五十円	十円	五円	一円
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0
	1	5	0	0	0	0	0	0
		4	2	0	0	0	0	0
			1	5	0	0	0	0
				4	2	0	0	0
					1	5	0	0
						4	2	0
							1	5
							0	10
						3	4	0
							3	5
							2	10
							1	15
							0	20
						2	6	0
							5	5
							⋮	⋮
							1	25
							0	30
						1	8	0
							7	5
							⋮	⋮
							1	35
							0	40
						0	10	0
							9	5
							⋮	⋮
							1	45
							0	50
					0	10	0	0
						9	2	0
							1	5
							0	10
						8	4	0
							⋮	⋮
							0	20
						⋮	⋮	⋮
						0	20	0
							⋮	⋮
							0	100
				3	4	0	0	0
					3	5	0	0
						4	2	0
							1	5
					⋮	⋮	⋮	⋮

表1から、なんとなく法則性が見えてくる。

五千円札を 2 枚使う、すなわち $n_{5000}=2$ の時、使える千円札の枚数は 0、つまり $n_{1000}=0$ であり、$n_{5000}=1$の場合は $n_{1000}=0$～5、$n_{5000}=0$ の場合は $n_{1000}=0$～10 である。

千円札の最大使用可能枚数を n_{1000}^{max} とすると、

$$n_{1000}^{max} = 5\ (2-n_{5000})$$

であることが分かる。

また、n_{1000} と n_{500}^{max} の間には次のような関係がなりたつ。

$$n_{500}^{max} = 2\ (n_{1000}^{max} - n_{1000})$$

今回は両替方法が何種類あるか、を問うているのであって、どのような組み合わせであるかは問うていないので、通貨xの使用可能枚数n_xは、一つ上位の通貨（x＋1と記す）の使用可能枚数n_{x+1}に対し、

$$0 \leqq n_x \leqq \alpha_x\, n_{x+1}$$

の範囲にある整数を走ることになる。ここで α_x は定数で、x＝5 円、50 円、500 円、5000 円の場合は $\alpha_x=2$ であり、x＝10 円、100 円、1000 円の場合は $\alpha_x=5$ である。

なお、五円貨までの使用枚数が決まれば、一円貨の使用枚数は自動的に決まるので、一円貨を何枚使うかは考える必要がない。

以上から、二千円札を使わない場合の 10000 円の両替方法は

$$N_{10000} = 1 + \sum_{n_{5000}=0}^{2} \sum_{n_{1000}=0}^{5n_{5000}} \sum_{n_{500}=0}^{2n_{1000}} \sum_{n_{100}=0}^{5n_{500}} \sum_{n_{50}=0}^{2n_{100}} \sum_{n_{10}=0}^{5n_{50}} \sum_{n_5=0}^{2n_{10}} 1 \quad \cdots①$$

通りあることになる。

①式の右辺第1項の「1」は壱万円札を1枚使う場合である。

2-2. 計算方法

2－1で述べた計算は2通りの方法で行った。パソコンによる計算と筆算である。

パソコンでは Linux－OS に標準装備されている GNU－FORTRAN コンパイラを用いて、プログラムを走らせた。その際、①式をそのまま計算するのではなく、五十円貨の項までは等差級数の和の公式を代入することで計算速度を飛躍的に向上させることができる。

すなわち、①を次のように変更して計算する。

$$N_{10000} = 1 + \sum_{n_{5000}=0}^{2} \sum_{n_{1000}=0}^{5n_{5000}} \sum_{n_{500}=0}^{2n_{1000}} \sum_{n_{100}=0}^{5n_{500}} \sum_{n_{50}=0}^{2n_{100}} (5n_{50}+1)^2$$

また、数値が大きなものになるので、プログラム内の整数変数には倍精度を指定する必要がある。

検算を兼ねて筆算も行った。筆算の場合は級数の和の公式[2]を参照して計算した。

双方の答えは一致し、二千円札を使わない場合の10000円の両替方法 N_{10000} は

$$N_{10000} = 181億5517万1409通り$$

であった。

3. 二千円札を使うケースを含む場合

3-1. 考え方

二千円札を使うことができる場合は若干、式の変更が必要となる。

表２．二千円札を使用する場合を含む

壱万円	五千円	二千円	千円
1	0	0	0
0	2	0	0
	1	2	1
			0
		1	3
			2
			1
			0
		0	5
			⋮
			0
	0	5	0
		4	2
			1
			0
		3	4
			⋮
			0
		2	6
			⋮
			0
		1	8
			⋮
			0
		0	10
			⋮
			0

表2を見ると、五千円札を1枚使う場合と使わない場合（壱万円札1枚のケースを除く）とで、n_{2000} と n_{1000} の関係が違うことが分かる。

（1）五千円札を1枚使う場合

表2を見ると、五千円札を1枚使う場合、二千円札の使用可能最大枚数は2であり、二千円札と千円札の使用可能枚数 n_{2000} と n_{1000} の関係は

$$n_{1000} = 2n_{2000} + 1$$

であることがわかる。

（2）五千円札を使わない場合

五千円札を使わない場合（壱万円札1枚で両替するケースを除く）では、二千円札の最大使用可能枚数は5であり、

$$n_{1000} = 2n_{2000}$$

となっている。

したがって、二千円札を使用することができるケースを含む 10000 円の両替方法 N'_{10000} は

$$N'_{10000} = 2 + \sum_{n_{2000}=0}^{2} \sum_{n_{1000}=0}^{2n_{2000}+1} \sum_{n_{500}=0}^{2n_{1000}} \sum_{n_{100}=0}^{5n_{500}} \sum_{n_{50}=0}^{2n_{100}} (5n_{50}+1)^2 + \sum_{n_{2000}=0}^{5} \sum_{n_{1000}=0}^{2n_{2000}} \sum_{n_{500}=0}^{2n_{1000}} \sum_{n_{100}=0}^{5n_{500}} \sum_{n_{50}=0}^{2n_{100}} (5n_{50}+1)^2$$

…②

通りあることになる。

②式の右辺第1項の定数「2」は壱万円札1枚および五千円札2枚で両替する場合の数である。

3-2. 二千円札を使えるケースを含む計算結果

2－2と同様の計算を行った結果、二千円札を使えるケースを含めた 10000 円の両替方法は

N'_{10000}＝245億9737万3439通り

あることが分かった。

4. まとめ

現行の通貨を組み合わせて 10000 円を両替する方法が何通りあるのか計算をした。その数は100億通りを超え、まさに天文学的であった。

ところで、2007 年 3 月現在の通貨流通量はおよそ表3の通りである[3]。

表3. 現行通貨の流通量（2007 年 3 月現在）

種類	流通枚数
壱万円札	69 億枚
五千円札	5 億枚
二千円札	1.5 億枚
千円札	35 億枚
五百円貨	37 億枚
百円貨	100 億枚
五十円貨	45 億枚
十円貨	200 億枚
五円貨	120 億枚
一円貨	400 億枚

これを見ると、二千円札は国民1人あたり1枚程度しか流通していない。実は、現在は発行されていない五百円札ですら、2 億 3 千万枚ほど流通している。二千円札は五百円札よりも少ないのである。

10000 円の両替方法でも、二千円札を含む場合の数は含まない場合に比べて、高々35％増でしかない。

普段の生活で二千円札が使えないこと使わないことが多いが、両替方法として二千円札はあまり役に立たないことが今回の計算で確かめられた。

参考文献

[1] 日本数学オリンピック（http://www.imojp.org/）1999 年予選第1問

[2]森口繁一ほか著「数学公式Ⅱ」（岩波書店）

[3] 日本銀行「通貨流通高」http://www.boj.or.jp/type/stat/dlong/fin_stat/money/cdab0010.csv

※補遺：二千円札を使わない場合のプログラム

```
C− 10000 円の両替方法:Fortran プログラム -----
        integer*8 nc
        nc=1
        do 50 n5000=0,2,1
          do 40 n1000=0,5*n5000,1
          do 30 n500=0,2*n1000,1
          do 20 n100=0,5*n500,1
          do 10 n50=0,2*n100,1
            nc=nc+(5*n50+1)**2
10        continue
20        continue
30        continue
40        continue
50      continue
        print *, nc
        stop
        end
```