

方位磁石群の磁区形成に関する行列的解法

石坂 千春*

概要

方位磁石を2次元に配列した「磁石のテーブル(方位磁石結晶)」は磁区を形成する場合と形成しない場合がある。方位磁石群の磁区形成に関して、行列的な解法によってその性質を調べた。方位磁石の配列と磁区の大きさの関係について得られた知見を報告する。

1. はじめに

物理教育学会大塚賞を受賞した斎藤吉彦氏の「磁石のテーブル(方位磁石結晶)」は方位磁石を多数2次元的に配置することで、磁区の形成をマクロに観察することができる優れた実験型展示である。斎藤氏は論文[1]の中で、この方位磁石群が鉄などの強磁性体のモデルとなっていること、自発的に対称性が破れた状態となっていることなどを述べている。

強磁性体の原子同士の作用は電磁気力ではなく、量子力学的な交換相互作用なので、方位磁石群は正確に言えば強磁性体のモデルではないが、直観的に磁区の形成を理解できることが大きな長所である。

強磁性体は隣り合う磁気モーメントが互いに平行になって磁区を形成しているため、外部磁場を掛けなくても自発的に強い磁化を示す。永久磁石は、強磁性体のうち、ある方向に大きな磁区を形成し、かつ、外部に磁力線を出している状態である。

強磁性体では、原子配列(構造)と磁性の強さとの関連も指摘されている。たとえば、正方格子状のクロム(Cr)は磁力線方向が交互に揃った磁気的な縞模様「スピン密度波」を形成する[2]。銅と鉄の酸化物(CuFeO₂)は三角格子構造を持っているが、温度や外部磁場によって構造が歪み、それが磁性を変化させるという報告がある[3]。

一方、常磁性体では外部磁場を掛けない限り、内部の磁気双極子が整列せず、磁区を形成しない。

斎藤氏の方位磁石結晶でも、方位磁石の配置を変えると磁区のでき方が変わってくる。ただし、この「磁石

のテーブル」では、方位磁石に摩擦や個性(強弱)があり、理想的な条件下での実験とはなっていない。

方位磁石結晶における磁区形成のふるまいを理論的に調べる方法として、適当な初期条件から計算を始め、逐次解をフィードバックさせることで最終的な方位磁石群の向きを求めるシミュレーション法がある[4]。しかしながら、シミュレーションは結果が初期条件の影響を大きく受け、また最終的にたどり着く磁区構造が、最も安定なものであるとは限らない。

そこで、本研究では、任意の格子に配列した方位磁石群の実現しうる向きの集合(磁区の形成)を行列的手法によって網羅的に求めることを試みた。

次章では計算方法について述べ、3章では異なる格子構造において実現する解についての計算結果を報告する。

2. 方位磁石群の行列的解法

2-1. 磁気双極子群の作る磁場

$\vec{r}_j = (x_j, y_j)$ に置いた磁気双極子(方位磁石) $\vec{m}_j = m_0(\cos \theta_j, \sin \theta_j)$ が \vec{r}_j につくる磁場 \vec{B}_{ij} は

$$\vec{B}_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\vec{r}_{ij}(\vec{m}_j \cdot \vec{r}_{ij}) - r_{ij}^2 \vec{m}_j}{r_{ij}^5} \right]$$

$$= \frac{m_0 \mu_0}{4\pi} \left[\frac{(3x_{ij}^2 - r_{ij}^2)\cos \theta_j + 3x_{ij}y_{ij}\sin \theta_j}{r_{ij}^5}, \dots \right] \quad \text{①}$$

$$\left[\frac{3x_{ij}y_{ij}\cos \theta_j + (3y_{ij}^2 - r_{ij}^2)\sin \theta_j}{r_{ij}^5} \right]$$

(ここで、 $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ 、 $x_{ij} = x_i - x_j$ 、 $y_{ij} = y_i - y_j$)

*大阪市立科学館 学芸課
E-mail: ishizaka@sci-museum.jp
http://www.sci-museum.kita.osaka.jp/~ishizaka/

と書ける(ただし、 $i \neq j$) [5]。

多数の方位磁石を2次的に配列し、双極子の向きが平衡状態になった時、各双極子に働くトルクは 0、すなわち \vec{r}_i にある磁気双極子 \vec{m}_i は、他の双極子からの磁場を足し合わせた $\vec{B}(\vec{r}_i)$ に平行になるから、

$$\vec{m}_i \propto \vec{B}(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} \vec{B}_{ij} \quad \dots \textcircled{2}$$

式①を使えば②式は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ \vdots \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{3x_{ij}^2 - r_{ij}^2}{r_{ij}^5} & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} & \frac{3y_{ij}^2 - r_{ij}^2}{r_{ij}^5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(ここで A_0 は定数)

方位磁石(磁気双極子)群の解 $\{\cos \theta_j, \sin \theta_j\}$ を求めることは、行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{3x_{ij}^2 - r_{ij}^2}{r_{ij}^5} & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} & \frac{3y_{ij}^2 - r_{ij}^2}{r_{ij}^5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

の固有ベクトル \vec{v} を求めることにほかならない。

行列 A の k 番目の固有値を $\lambda_k, \lambda_{k'}$ に対する固有ベクトルを \vec{v}_k とすると、解は $(\cos \theta_j, \sin \theta_j) = \vec{v}_{k,i} / |\vec{v}_{k,i}|$ として求めることができる。行列 A は対称行列なので、解法には Jacobi 法を用いることができる[6]。

解(固有値)は一般的に行列の階数、この場合は「双極子の個数 $\times 2$ 」通り求まる。このうち、興味のある解、もっとも起こりやすい解は、双極子群による系のポテンシャル U

$$U = -\sum_i \vec{m}_i \cdot \vec{B}(\vec{r}_i) \\ = -\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{m}_j \cdot \vec{r}_{ij}) - r_{ij}^2 \vec{m}_i \cdot \vec{m}_j}{r_{ij}^5} \\ \dots \textcircled{4}$$

が負で、かつ、もっとも低いものである。

行列的解法では、実現しうるもの ($U < 0$)、実現しないもの ($U > 0$)も、すべての解が“同時に”求められるが、今回はポテンシャルが最も低い解(P解)、2番目の解(S解)、3番目の解(T解)について考察した。

もっとも単純な系として、方位磁石を 2~4 個並べた場合について図1に示す。

3 個および 4 個の方位磁石を並べた場合、磁針の向きを、全体として閉じるように配列するものが最も安定(P解)であることが分かる。

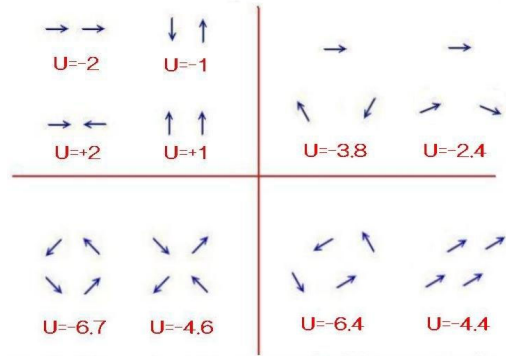


図1. 2 個(左上)、3 個(右上)、4 個(正方形:左下)、4 個(ひし形:右下)の方位磁石を並べた場合の磁針の向きとポテンシャルの値。3 個、および 4 個の方位磁石を並べた場合については、もっともポテンシャルが低い P 解と 2 番目に低い S 解のみ表示している。

ところで固有値は系のポテンシャル U と負の相関

$$U \propto -\lambda$$

があり、2 個の方位磁石の場合、表1のようになる。

表1. 2 個の方位磁石系の固有値とポテンシャル

順位	固有値	U
1	2	-2
2	1	-1
3	-1	1
4	-2	2

256 個の方位磁石群をある格子形に配列した場合の固有値と U の関係をプロットしたものが図 2 である。固有値と U の相関に幅があるのは、局所的な磁場(自分以外の双極子からの磁場のベクトル合成)が 0 となり、向きが一意に決まらずフラストレーションを起こしている双極子があるからであろう(計算では、フラストレーションを起こしている双極子の向きは数値的なゆらぎによって与えられているものと思われる)。

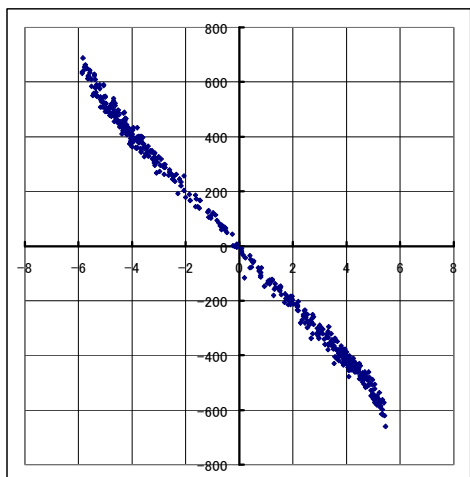


図 2. 256 個方位磁石群の固有値(横軸)とポテンシャル(縦軸)の相関。負の相関が見られる。

2-2. 磁区の大きさの評価法

磁区の大きさを評価するために、相関関数 ξ を、双極子の任意の対の間隔に対する角度差の余弦の平均として、次式のように導入した。

$$\xi(r) = \langle \cos(\theta_i - \theta_j) \rangle_{r_{ij}=r}$$

任意の間隔の双極子対の向きが同じであれば相関関数 ξ は正の値 ($\xi > 0$) をとり、まったく関係がなければ $\xi = 0$ 、反対の向きならば負の値 ($\xi < 0$) をとる。磁区の大きさは $\xi > 0$ の領域の大きさ(間隔 r) として評価することができる。

3. 結果

3-1. 三角格子の場合

ここでは、1 辺の長さ 1 の正三角形の頂点に方位磁石を配置し、全体として、 $n \times n$ 個のひし形にしたものを「三角格子」と呼ぶ(図 3)。

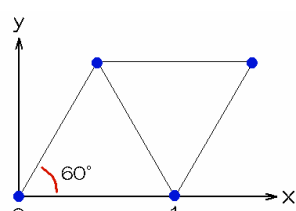


図 3. 三角格子

$16 \times 16 = 256$ 個の双極子を配列した場合の方位磁石の向きとその値を図 4 である。

図 4 を見ると、ポテンシャル U がもっとも低い P 解 ($U = -660$) は、全体として方位磁石の向きが閉じた環状の配列をしており磁区が大きく、S 解 ($U = -621$)、T 解 ($U = -618$) になるにしたがい、磁区がだんだん細かくなっていることが分かる。いずれの解でも、全体の磁場 $\vec{B} = \sum \vec{m}_i$ はほぼ 0 であり、外部に磁場を及ぼしてはいない。

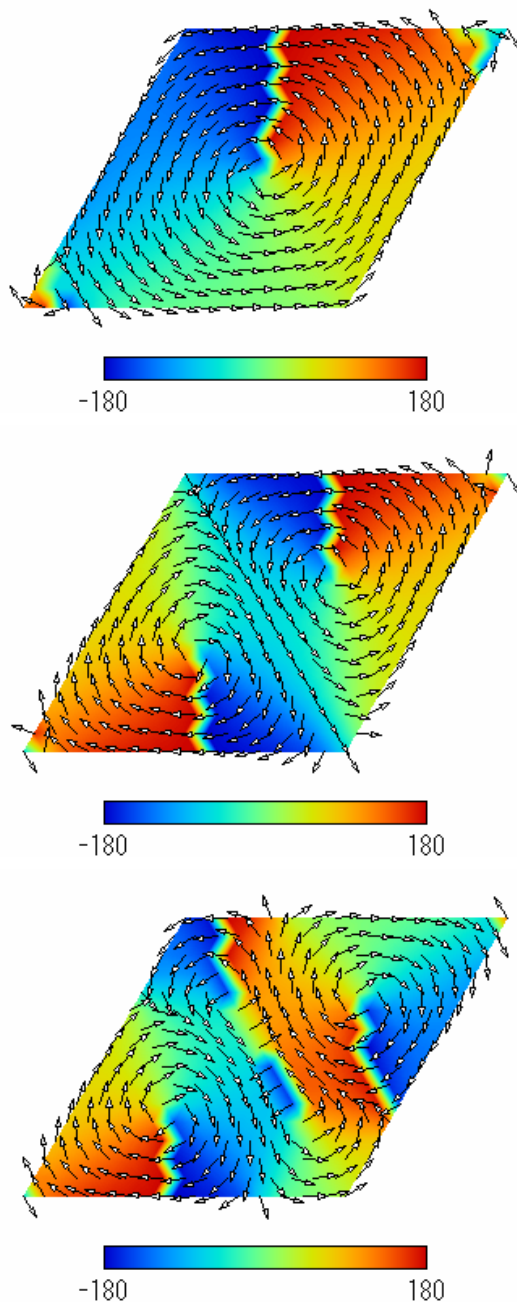


図 4. 256 個の双極子を三角格子配列した場合の P 解(上)、S 解(中)、T 解(下)。向きの揃ったところ(磁区)は同じ色で表している(白い帯状の領域は -180° から 180° に変わるところであり、磁壁ではない)

磁区の大きさを相関関数 $\xi(r)$ によって評価する(図 5)。図 4 の印象を裏付けるように、相関が正 ($\xi > 0$) となる領域、すなわち磁区はポテンシャルが高くなるにしたがって小さくなり、大きさは1辺の長さ÷磁区の数、すなわち、P 解では 7 (~16÷2)、S 解では 5 (~16÷3)、T 解では 4 (~16÷4) 程度になっている。

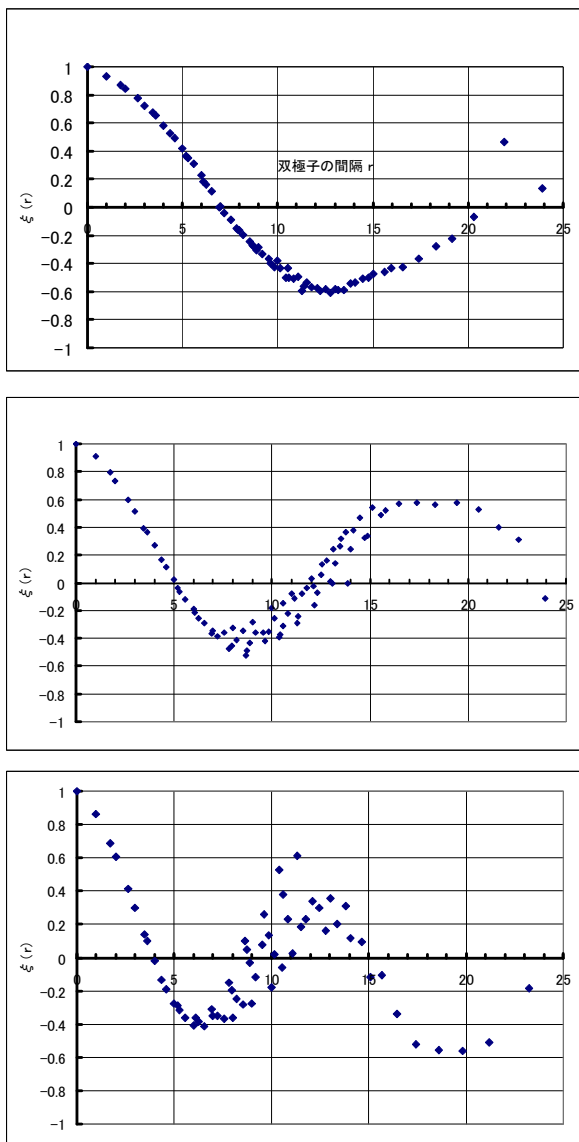


図 5. P 解(上)、S 解(中)、T 解(下)に対する相関関数 ξ 。 $\xi > 0$ の領域が磁区の大きさを表す。P 解では磁区の大きさ ($\xi > 0$ の領域) は 7 程度、S 解、T 解になるにしたがい小さくなる。

三角格子の応用として、境界が正六角形になるように方位磁石を配したものについても計算した。図 6 に最外辺に9個、全体で 217 個の方位磁石を配した場合の P 解および S 解を示す。境界の形が変わっても、三角格子と同様大きな磁区を形成し、P 解は全体として閉じた環状の磁力線を形成し、S 解は P 解よりも磁区が小さくなっていることが分かる。

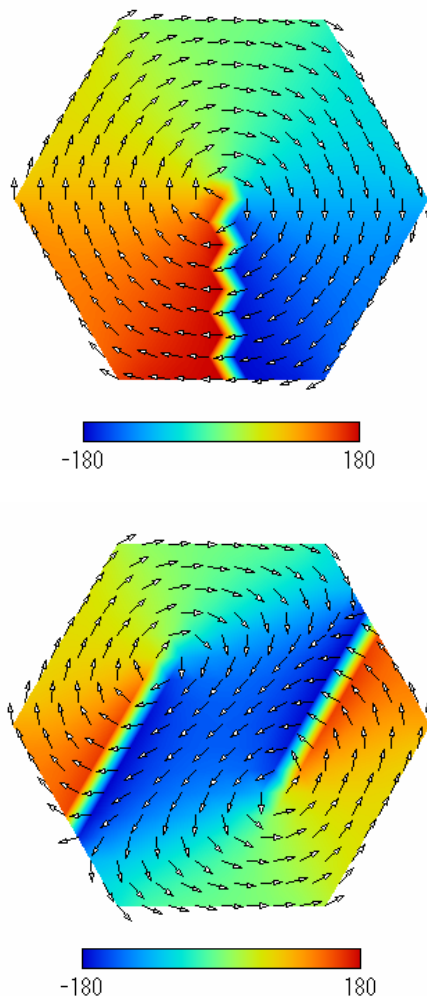


図 6. 正六角形に配置した 217 個の双極子に関する P 解 ($U=-577$; 上) および S 解 ($U=-534$; 下)。三角格子の場合と同様、P 解では環状の配置になり、S 解は P 解より磁区が小さくなる。

3-2. 正方格子の場合

長さ1の正方形の頂点ごとに方位磁石を配置し、1辺n個、全体として $N=n \times n$ の正方形にしたものをここでは「正方格子」と呼ぶ。

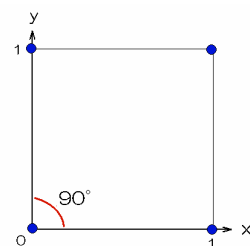


図 7. 正方格子

$16 \times 16 = 256$ 個の双極子を正方格子に配列した場合の結果が図 8 である。

図 8 を見ると明らかに、三角格子と違って磁区を形成していないことが分かる(この結果は相関関数でも見ることができる; 図 9)。特に、P 解 ($U=-623$) は基本配置(図 2 左下)の組み合わせになっている。また T 解 ($U=-619$) は反平行の配列の組み合わせになっており、反強磁性的である。なお、正方格子の場合、P 解と S 解のポテンシャルの差はわずか(0.16%)である。

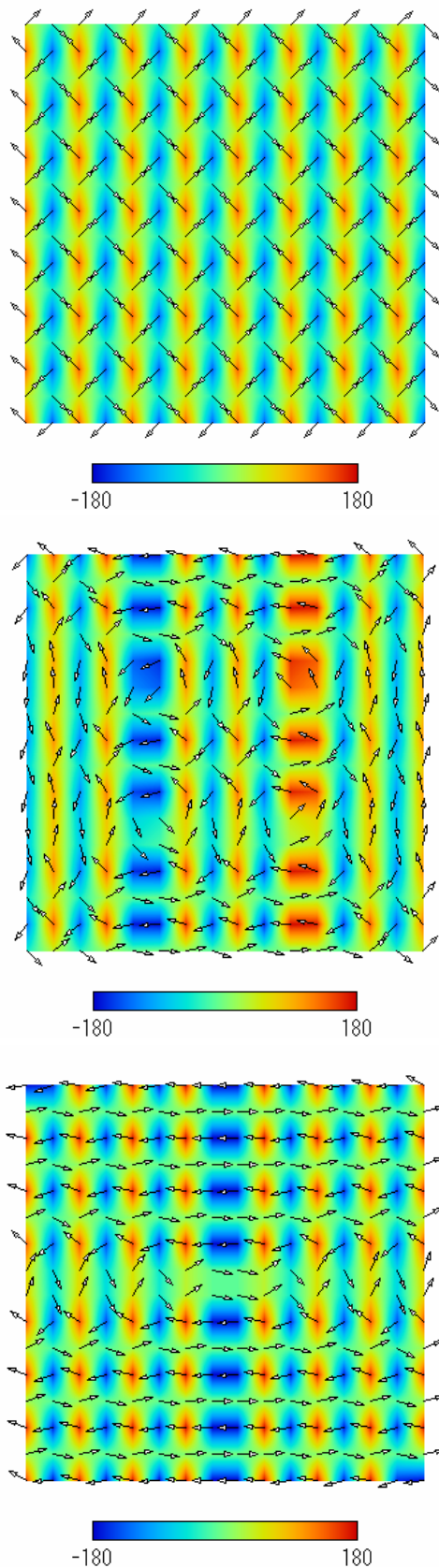


図 8. 256 個の双極子を正方格子配列した場合の P 解 ($U=-623$; 上)、S 解 ($U=-622$; 中)、T 解 ($U=-619$; 下)。向きの揃ったところ(磁区)は同じ色で表しているが、正方格子の場合、磁区の形成は見られない。P 解は基本配列の組み合わせ、T 解は反強磁性的である。

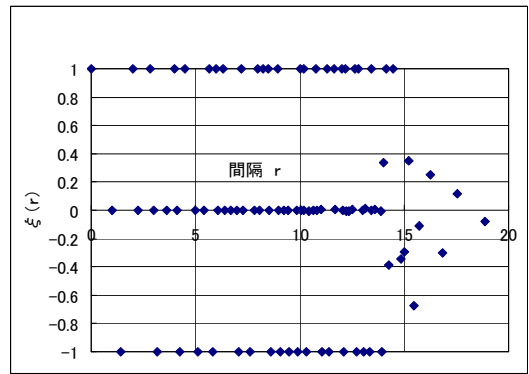


図 9. 正方格子 (256 個) P 解の相関関数。磁区構造を示さない。

三角格子と同じように大きな磁区を形成する解を探したところ、37 番目の解としてポテンシャル $U=-528$ に見つかった(右図)。P 解とのポテンシャル差は $\Delta U=100$ 程度あるため、現実には実現が難しいはずであるが、斎藤氏の磁石のテーブルでは大きな磁区を形成している三角格子から静かに正方格子に変形すると、磁区構造が保たれる場合がある。これは方位磁石の針と支点との間に摩擦があるためであろう。実際、このような磁区構造は不安定なため、わずかな擾乱を与えるとすぐに磁区を持たない配置へと変化してしまう。

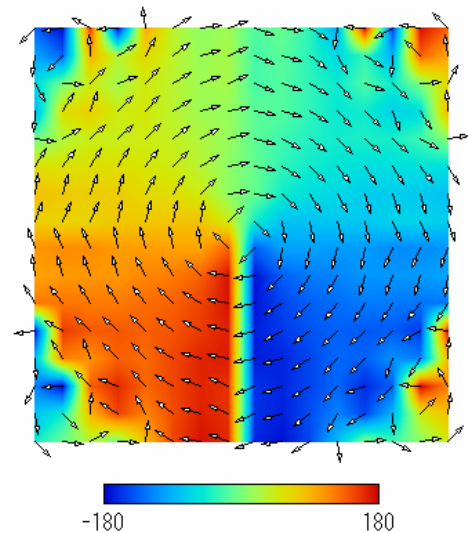
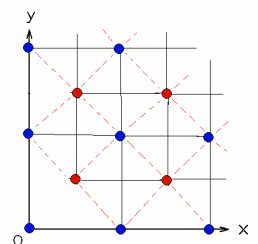


図 10. 正方格子 (256 個) 37 番目の解 ($U=-528$)。三角格子と同様の大きな磁区構造を示す。

3-3. 面心格子

正方格子の応用として、「面心格子」について計算した。面心格子は正方格子の各面の中心にも方位磁石を配したものであり、



境界条件の異なる正方格子と見ることもできる(正方格子の境界を格子と45°をなす角度にとったものが面心格子になる)。

図 11 には最近接の双極子間隔を1になるように面心格子配置した200個の方位磁石群の P 解、S 解を示す。反平行の磁場構造が交互に並んだ縞模様を作っている。面心格子の場合は、反強磁性的であり、磁区をつくらず、もっとも長く双極子がならぶ対角線上で方位磁石群の向きをそろえ、ポテンシャルを低くしていることがうかがえる(図2左上参照)。

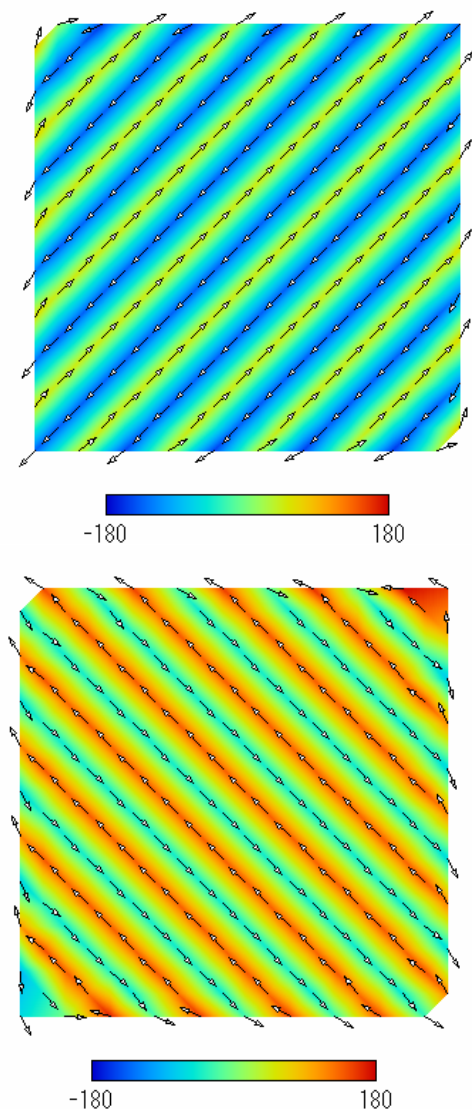


図 11. 200 個の方位磁石を面心格子状に配置した場合の磁場構造。P 解(上)と S 解(下)ともに磁区は形成せず、対角線に平行な縞状の磁場構造を示す。

3-4. その他の格子

「籠目格子」(図 12 左)、「六角(亀甲)格子」(図 12 右)についても計算を行った。

ヘキサグラムの組み合わせである籠目格子の場合、実現する磁場構造は三角格子のように大きな磁区を

示している(図 13)。また正六角形の組み合わせである六角格子の場合は、磁場構造は正方格子的となり、磁区を形成していない(図 14)。

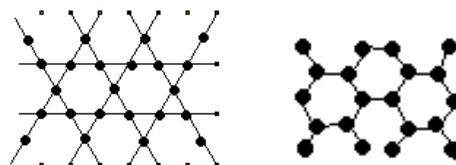


図 12. 「籠目格子」(左)と「六角(亀甲)格子」(右)

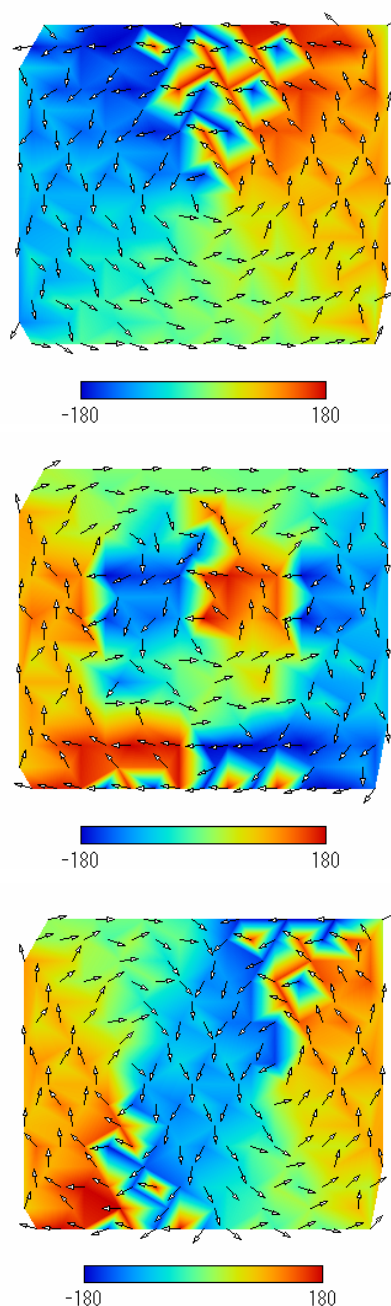


図 13. 籠目格子(双極子数 184)の P 解($U=-393$; 上)、S 解($U=-375$; 中)および T 解($U=-374$; 下)。三角格子的な大きな磁区を示している。

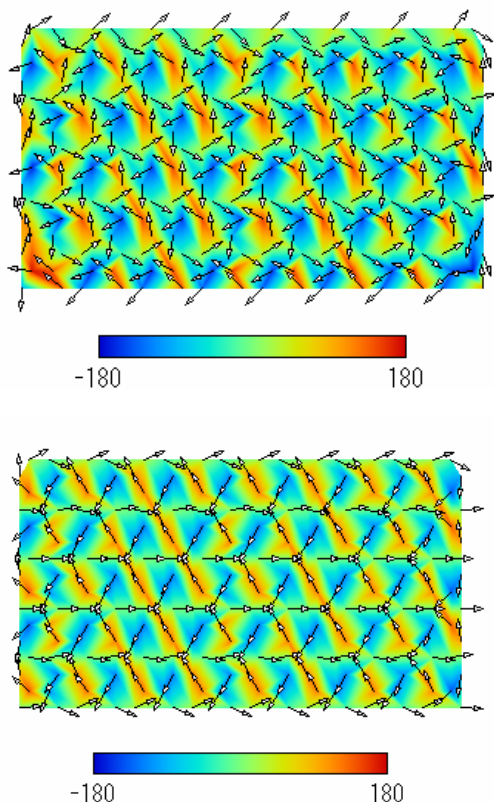


図 14. 256 個の双極子を六角(亀甲)格子に配置した場合の P 解(上)と S 解(下)。どちらも磁区を形成していない。

4. 考察

今回の計算で、格子の形によって磁区のでき方がちがうことが分かった。三角格子や籠目格子では大きな磁区が形成され、正方格子や六角(亀甲)格子では磁区の形成は見られなかった。また、面心格子では反強磁性的な縞状の磁場構造が見られた。

正方格子や面心格子では、最近接双極子対が安定な向きとなるよう図 2 で述べた磁場構造を組み合わせることで表現される。面心格子では、ポテンシャルを低くするために対角線に平行に縞状の磁性構造をとる。

大きな磁区を作る格子構造と磁区を作らない格子構造との物理的な違いは何であろうか。

三角格子と正方格子は格子角 ϕ を変えることで連続的に変化する(図 15)。

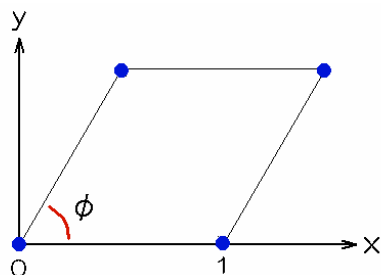


図 15. 格子角 ϕ

三角格子 ($\phi = 60^\circ$) と正方格子 ($\phi = 90^\circ$) の間で、磁区のできる構造から磁区のできない構造へと変化が起きているはずなので、それはどの角度なのかを

調べた。

図 16 は格子角 $\phi = 72^\circ$ (上)、 $\phi = 72.5^\circ$ (中)、 $\phi = 73^\circ$ (下) について、それぞれの P 解(左)、S 解(右)を並べたものである。

これを見ると、格子角 $\phi = 72^\circ$ ではまだ三角格子と同様の大きな磁区構造をもっているが、 $\phi = 72.5^\circ$ では P 解は三角格子的であるのに対し、S 解は正方格子的な磁区構造になっている。そして $\phi = 73^\circ$ では P 解、S 解ともに三角格子的な磁区構造は消え、磁区をもたない、正方格子的な磁場構造を示すようになっていくことが分かる。

したがって、 $\phi = 72.5^\circ$ に、正方格子と三角格子の境界があるものと思われる。

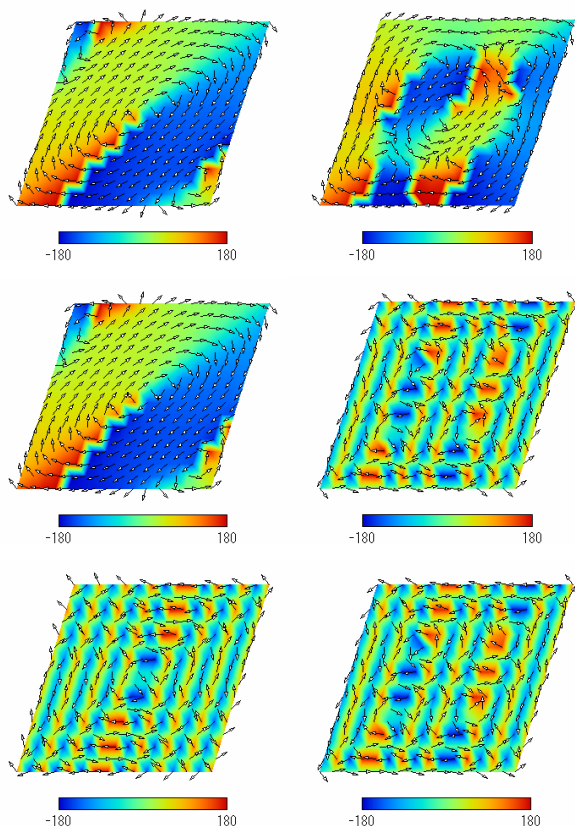


図 16. 256 個の双極子群の格子角度 ϕ を $\phi = 72 \sim 73^\circ$ で変化をさせた。 $\phi = 72^\circ$ (上) では P 解(左)、S 解(右)ともに三角格子的な大きな磁区構造を見せているが、 $\phi = 72.5^\circ$ で S 解に正方格子的な磁場構造が現れ、 $\phi = 73^\circ$ では P 解、S 解ともに、正方格子と同じように大きな磁区が見られなくなる。

前章 3-4 で見たように、籠目格子では三角格子的な大きな磁区構造、六角(亀甲)格子では正方格子的な磁場構造をとる。前者では最近接双極子を見込む格子の角度に 60° が含まれているが、後者は 120° のみである。

72.5° よりも小さな格子角を持つか否かが、大きな磁区構造を見せるか見せないかの違いとして現れていると推測される。

「磁石のテーブル(方位磁石結晶)」では方位磁石の配列を変えることで、磁区の形成の仕方が一目瞭然に変化する。このことが行列計算によっても確かめられた。物質中の磁場構造はスピン交換作用によるものであり、②式のような単純な電磁気的作用ではないが、双極子間の電磁気的な力を計算することは大学物理レベルで十分可能であり、結果が直感的であること、方位磁石を並べることで自ら実験することができること、等、教育的に優れた題材となっている。

今回行った方位磁石結晶に対する行列的解法では計算に初期条件が必要なく、方位磁石群の結晶格子を決めれば、結果は直線的に、かつ網羅的に求まるので、物理的にクリアな議論ができる。

今後、さらに双極子(方位磁石)が多いケースや、さまざまな格子形・境界形についての計算を重ねていけば、磁区の形成と結晶格子の形についてより有意な結論を導くことができるであろう。

また、双極子に対し“温度”を導入することができれば、温度変化に対する内部磁場構造の自発的対称性の破れやキュリー点などについても調べることができ、さらに外部磁場を導入することができれば、磁区の移動やヒステリシスについても考察することができる。

斎藤氏らと議論を重ね、今後の研究につなげていきたい。

参考資料

- [1] 斎藤吉彦 物理教育 Vol.53-2,103(2005)
- [2] 山田和芳 <http://www.yamada-lab.imr.tohoku.ac.jp/Study-j.html>
- [3] 勝又紘一ほか 理化学研究所プレスリリース 2006 <http://www.riken.jp/r-world/info/release/press/2006/061109/detail.html>
- [4] Nishimatsu et al., 大阪市立科学館研究報告 17, P.1 (2007)
- [5] バーガー & オルソン「電磁気学」(培風館) 1991
- [6] Numerical Recipes for Fortran 77, p.456 <http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php>

※補遺: 正方格子に対する行列計算プログラム

```

C== 方位磁石群の行列的解法プログラム =====
c--  N : 1辺の双極子数、 NN: 全双極子数
c--  NM: 行列要素数 = 2*NN
C=====
parameter(N=16,NN=N*N,NM=2*NN,phi=90.0)
real d(NM),v(NM,NM),a(NM,NM),u(NM)
real x(NN),y(NN)
integer kmin(3)
do 10 i=2,NM,2
  a(i-1,i-1)=0.
  a(i,i-1)=0.
  a(i-1,i)=0.
  a(i,i)=0.
10  continue
C=====
dx=cos(pi()/180.*phi)
dy=sin(pi()/180.*phi)
do 22 i=1,NN
  x(i)=mod(i-1,N)+dx*((i-1)/N)
  y(i)=(i-1)/N*dy
22  continue
C=====
do 50 i=1,NN-1
  do 60 j=i+1,NN
    xij=x(i)-x(j)
    yij=y(i)-y(j)
    r5=sqrt((xij**2+yij**2)**5)
    a(2*i-1,2*j-1)=(2.*xij**2-yij**2)/r5
    a(2*j-1,2*i-1)=a(2*i-1,2*j-1)
    a(2*i,2*j-1)=3.*xij*yij/r5
    a(2*j-1,2*i)=a(2*i,2*j-1)
    a(2*j,2*i-1)=a(2*i,2*j-1)
    a(2*j-1,2*i)=a(2*i,2*j-1)
    a(2*i,2*j)=-xij**2-2.*yij**2)/r5
    a(2*j,2*i)=a(2*i,2*j)
60  continue
50  continue
c=====
call jacobi(a,NM,NM,d,v,nrot)
c=====
call potential(v,NN,NM,x,y,u)
c=====
u1=u(1)
u2=u(1)
u3=u(1)
k1=1
k2=1
k3=1
do 90 i=1,NM
  if(u(i).lt.u3) then
    if(u(i).lt.u2) then
      if(u(i).lt.u1) then
        u3=u2
        k3=k2
        u2=u1
        k2=k1
        u1=u(i)
        k1=i
      else
        u3=u2
        k3=k2
        u2=u(i)
        k2=i

```



```

        endif
    else
        u3=u(i)
        k3=i
    endif
endif
90  continue
c=====
    kmin(1)=k1
    kmin(2)=k2
    kmin(3)=k3
    do 70 i=1,3
        ki=kmin(i)
        id=i
    c=====
        call output(u,v,NN,NM,x,y,ki,id)
    c=====
70  continue
    stop
    end
C=====
c--  Jacobi 法 サブルーチン
c--  Numerical Recipes 11.1
C=====
    subroutine jacobi(a,n,np,d,v,nrot)
    real a(np,np),d(np),v(np,np)
    parameter(nmax=512)
    real b(nmax),z(nmax)
    do 12 ip=1,n
        do 11 iq=1,n
            v(ip,iq)=0.
11  continue
            v(ip,ip)=1.
12  continue
            do 13 ip=1,n
                b(ip)=a(ip,ip)
                d(ip)=b(ip)
                z(ip)=0.
13  continue
                nrot=0
                do 24 i=1,50
                    sm=0.
                    do 15 ip=1,n-1
                        do 14 iq=ip+1,n
                            sm=sm+abs(a(ip,iq))
14  continue
15  continue
                    if(sm.eq.0.) return
                    if(i.lt.4) then
                        tresh=0.2*sm/n**2
                    else
                        tresh=0.
                    endif
                    do 22 ip=1,n-1
                        do 21 iq=ip+1,n
                            g=100.*abs(a(ip,iq))
                            if((i.gt.4).and.(abs(d(ip))+g.eq.abs(d(ip)))
                                .and.(abs(d(iq))+g.eq.abs(d(iq)))) then
                                a(ip,iq)=0.
                            elseif(abs(a(ip,iq)).gt.tresh) then
                                h=d(iq)-d(ip)
                                if(abs(h)+g.eq.abs(h)) then
                                    t=a(ip,iq)/h
                                else
                                    theta=0.5*h/a(ip,iq)
                                    t=1./(abs(theta)+sqrt(1.+theta**2))
                                endif
                                if(theta.lt.0.) t=-t
                                endif
                                c=1./sqrt(1.+t**2)
                                s=t*c
                                tau=s/(1.+c)
                                h=t*a(ip,iq)
                                z(ip)=z(ip)-h
                                z(iq)=z(iq)+h
                                d(ip)=d(ip)-h
                                d(iq)=d(iq)+h
                                a(ip,iq)=0.
                                do 16 j=1,ip-1
                                    g=a(j,ip)
                                    h=a(j,iq)
                                    a(j,ip)=g-s*(h+g*tau)
                                    a(j,iq)=h+s*(g-h*tau)
                                continue
                                do 17 j=ip+1,iq-1
                                    g=a(ip,j)
                                    h=a(j,iq)
                                    a(ip,j)=g-s*(h+g*tau)
                                    a(j,iq)=h+s*(g-h*tau)
                                continue
                                do 18 j=iq+1,n
                                    g=a(ip,j)
                                    h=a(iq,j)
                                    a(ip,j)=g-s*(h+g*tau)
                                    a(iq,j)=h+s*(g-h*tau)
                                continue
                                do 19 j=1,n
                                    g=v(j,ip)
                                    h=v(j,iq)
                                    v(j,ip)=g-s*(h+g*tau)
                                    v(j,iq)=h+s*(g-h*tau)
                                continue
                                nrot=nrot+1
                            endif
                            continue
                            do 23 ip=1,n
                                b(ip)=b(ip)+z(ip)
                                d(ip)=b(ip)
                                z(ip)=0.
                            continue
                            pause 'too many iterations in jacobi'
                            return
                            end
                            C=====
                            c--  結果出力サブルーチン
                            c--  双極子の座標と向きを fort.#id に出力する
                            C=====
                            subroutine output(u,v,n,np,x,y,k,id)
                            real d(np),v(np,np),x(n),y(n),u(np)
                            write(id,*) "#",k, u(k)
                            do 20 jp=1,n
                                sq=sqrt(v(2*jp-1,k)**2+v(2*jp,k)**2)
                                if(sq.gt.0.) then
                                    cc=v(2*jp-1,k)/sq
                                    ss=v(2*jp,k)/sq
                                    deg=acos(cc) *57.29578
                                    if(ss.lt.0.) phi=-phi
                                    write(id,200) x(jp),y(jp),cc,ss,deg
                                    format(1x,4f10.3,f10.1)
                                endif
                            endif
                            continue
                        200  continue
                    20  continue
                21  continue
            22  continue
        23  continue
        24  continue
    25  continue
    end

```

```

return
end
C=====
c-- ポテンシャル計算サブルーチン
c-- ④式によりポテンシャルを計算
C=====
subroutine potential(v,n,np,x,y,u)
real v(np,np),x(n),y(n),u(np),c(n),s(n)
do 30 k=1,np
  u(k)=0.
  do 11 i=1,n
    sq=sqrt(v(2*i-1,k)**2+v(2*i,k)**2)
    if(sq.eq.0.) goto 30
    c(i)=v(2*i-1,k)/sq
    s(i)=v(2*i,k)/sq
11  continue
  do 10 i=1,n-1
    do 20 j=i+1,n
      xij=x(i)-x(j)
      yij=y(i)-y(j)
      r2=xij**2+yij**2
      r5=sqrt((xij**2+yij**2)**5)
      u(k)=u(k)
      1      -(3.*(c(i)*xij+s(i)*vij)*(c(j)*xij+s(j)*yij)
      2      -r2*(c(i)*c(j)+s(i)*s(j)))/r5
20  continue
10  continue
30  continue
return
end
C=====

```