大阪市立科学館研究報告 18, 29-32 (2008)

方位磁石群の磁区形成に関する行列的解法（補遺）

石 坂　千 春 *

概　要

前回、方位磁石の2次元配列「磁石のテーブル（方位磁石結晶）」についてシミュレーションを行なう方法として行列的解法を提案した。その後、この行列的解法で解が直接求まるのは特殊なケースであることが分かったので報告する。

1. はじめに

「磁石のテーブル（方位磁石結晶）」[1]は方位磁石を多数2次元的に配置することで磁区の形成を直観的に観察できる実験型展示である。配置を変えると磁区のでき方が変わることを観察できる点が優れているが、方位磁石には摩擦や個性（強弱）があるので、理想的な条件下での実験とはなっていない。

一方、方位磁石結晶における磁区形成のふるまいを理論的（数値的）に調べる方法として、適当な初期条件から計算を始め、得られた解をフィードバックさせることで最終的な方位磁石群の向きを求めるシミュレーション法[2]が一般的であるが、前回の報告[3]では、方位磁石群の解を1回の計算で求めるための行列的計算方法について述べた。

その方法に対し、齋藤氏、西松氏より解になっていないのではないか、との指摘を受けた[4]。

次章では行列的計算方法について再述し、3 章では西松氏らからの指摘について、4章では検証結果を報告する。

2. 行列的解法の考え方

$\vec{r}_j=(x_j, y_j)$に置いた磁気双極子（方位磁石）$\vec{m}_j=m_0(\cos\theta_j, \sin\theta_j)$が $\vec{r}_i$ につくる磁場$\vec{B}_{ij}$ は、$r_{ij}=|r_i-r_j|$、$x_{ij}=x_i-x_j$、$y_{ij}=y_i-y_j$とすると

$$\vec{B}_{ij}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{r}_{ij}(\vec{m}_j\cdot\vec{r}_{ij})-r_{ij}^2\vec{m}_j}{r_{ij}^5}\right]$$

$$=\frac{m_0\mu_0}{4\pi}\begin{bmatrix}\dfrac{\left(3x_{ij}^{\ 2}-r_{ij}^2\right)\cos\theta_j+3x_{ij}y_{ij}\sin\theta_j}{r_{ij}^5}, \\ \dfrac{3x_{ij}y_{ij}\cos\theta_j+\left(3y_{ij}^2-r_{ij}^2\right)\sin\theta_j}{r_{ij}^5}\end{bmatrix}\quad\cdots①$$

と書ける（ただし、i≠j）[5]。

多数の方位磁石を2次元的に配列し、双極子の向きが平衡状態になった時、各双極子に働くトルクは 0、すなわち $\vec{r}_i$にある磁気双極子 $\vec{m}_i$は、他の双極子からの磁場を足し合わせた$\vec{B}(\vec{r}_i)$に平行になるから、

$$\vec{m}_i\propto\vec{B}(\vec{r}_i)=\sum_{j\neq i}\vec{B}_{ij}\quad\cdots②$$

②式を満たす解{$\vec{m}_i$}は一般的に系の大きさ（双極子数 N）に依存して数多く存在することが予想されるが、このうち、興味のある解、現実的にもっとも起こりやすい配置は、双極子群による系のポテンシャル

$$U=-\sum_i^N\vec{m}_i\cdot\vec{B}(\vec{r}_i)$$

$$=-\sum_i^N\sum_{j\neq i}\frac{3(\vec{m}_i\cdot\vec{r}_{ij})(\vec{m}_j\cdot\vec{r}_{ij})-r_{ij}^2\vec{m}_i\cdot\vec{m}_j}{r_{ij}^5}$$

$\cdots③$

が負で、かつ、もっとも低いものである。

さらに求めた解が安定な極値となっていることは、内部ポテンシャル U の θ_iに関する微分係数

*大阪市立科学館 学芸員
ishizaka@sci-museum.jp

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_i^2}>0 \quad \cdots④$$

で判定できる。

もし②式が①式を使って行列的に

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \cos\theta_i \\ \sin\theta_i \\ \vdots \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & \frac{3x_{ij}^2-r_{ij}^2}{r_{ij}^5} & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} & & \\ & & & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} & \frac{3y_{ij}^2-r_{ij}^2}{r_{ij}^5} & & \\ & & \cdots\ \cdots & & & & \\ & & \cdots\ \cdots & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \cos\theta_j \\ \sin\theta_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(ここで A_0 は定数) ・・・⑤

と書けるならば、双極子群の解 $\{\cos\theta_i, \sin\theta_i\}$ を求めることは、行列 A

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & \frac{3x_{ij}^2-r_{ij}^2}{r_{ij}^5} & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} & & \\ & & & \frac{3x_{ij}y_{ij}}{r_{ij}^5} & \frac{3y_{ij}^2-r_{ij}^2}{r_{ij}^5} & & \\ & & \cdots\ \cdots & & & & \\ & & \cdots\ \cdots & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有ベクトル $\vec{v}$ を求めることにほかならない。

なぜなら、行列 A の k 番目の固有値を λ_k、λ_k に対する固有ベクトルを $\vec{v}_k$ とすると、定義から

$$A\vec{v}_k=\lambda_k\vec{v}_k$$

なので、すべての双極子 i に対して

$$A_0\lambda_k=1 \quad ・・・⑥$$

$$v_0=\sqrt{v_{k,2i-1}^2+v_{k,2i}^2} \qquad (一定) \qquad \cdots⑦$$

が成り立つならば、

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \cos\ \theta_i \\ \sin\ \theta_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{v_{k,2i-1}}{v_0} \\ \frac{v_{k,2i}}{v_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

は⑤式を満たすからである。

3. 齋藤氏、西松氏からの指摘

ところが、一般には、⑤式、⑥式、⑦式の仮定は正しくない。

②式における比例係数を b_i としたとき

$$\vec{m}_i = b_i \sum_{j\neq i} \vec{B}_{ij}$$

の b_i は一般に局所的な磁場 $\vec{B}(\vec{r}_i)$ の大きさが場所ごとに異なるので、双極子 i ごとに違う値をとる。

すなわち、行列 A の固有ベクトル $\vec{v}$ の規格化係数

$$v_0=\sqrt{v_{k,2i-1}^2+v_{k,2i}^2}$$

は、一般には双極子ごとに異なるはずである。

したがって、①式、②式から導いた⑤式に現れる係数 A_0 は一般に定数ではなく、2 回ずつ同じ成分が繰り返される対角行列

$$A_0=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & & & & & \\ 0 & A_1 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A_i & & & \\ & & & & A_i & & \\ & & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & A_N & 0 \\ & & & & & 0 & A_N \end{pmatrix}$$

として表現され、特殊な場合を除き、$A_1=\cdots=A_i=\cdots=A_N=1/\lambda_k$ とは限らない。

A_0 の各成分が同じでない場合、行列 A の固有ベクトル $\vec{v}$ と行列 $A_0\cdot A$ の固有ベクトル $\vec{v}'$ は一致しないので、第 2 章で説明した行列的方法では、双極子群の解を求めることができないことになる。

西松氏らはラグランジュの未定乗数法を用いて、このことを指摘した[4]。

4. 検証結果

4-1. 行列的解法が成り立つ場合

ところで、第3章では一般的に行列的解法が解にたどり着けないことを見たが、⑤式が成り立つような特殊な場合には、実は解が求まることもまた事実である。

この特殊な場合というのは、双極子iとjを任意に入れ替えても、行列Aの各成分が変わらない(交換対称性の高い)場合であり、

1)双極子2個を並べたケース
2)3個を正三角形の頂点に配置したケース
3)4個を正方形の頂点に配置したケース
4)円周上に等間隔に双極子を配置したケース

にあたる。これらの場合は比例係数 A_0、規格化係数 v_0 ともに全双極子に共通の定数となり、⑤⑥⑦式が成り立つ。

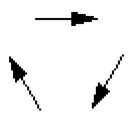
1)双極子2個を並べたケース

安定な解としては、次の2通りである。

→→ (U= -2) 、 ↑ ↓ (U= -1)

2)双極子3個を正三角形の頂点に配置したケース

正三角形の頂点に双極子を配置するケースは、報告[3]での三角格子の基本パターンであるが、双極子の向きが閉じた環状になる



が解となることを確かめた(U= -3.75)。

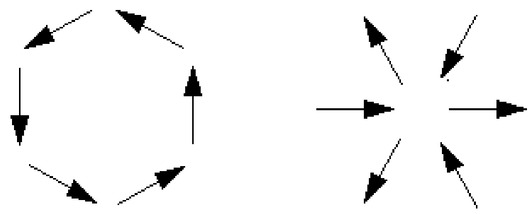
3)双極子4個を正方形の頂点に配置したケース

これも前回の報告[3]で示された2解が②式と条件④を満たしており、安定な解であった。

U= -6.7　　　U= -4.6

4)円周上に等間隔に双極子を配置したケース

上記の 1)、2)、3)はいずれも実は円周上に等間隔に双極子を配置するケースに集約される。ここでは6個の双極子を直径1の円周上に等間隔に配置した場合の計算結果を示す。どちらも安定解の条件を満たしている。

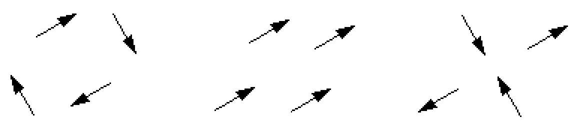


U= -12.3　　　U= -6.2

円周上に等間隔に双極子を配置する場合、双極子間の交換対称性が高いので、行列的解法が利用できることが分かった。

5)頂角60度のひし形の頂点に配置したケース

また、上記4ケースからは逸脱し、双極子間の交換対称性が破れている場合であるが、4個の双極子を頂角60度のひし形の頂点に配置した場合も、行列的開放によって安定解を3パターン求めることができた。



U= -6.4　　　U= -4.4　　　U= -2.8

以上のケースでは、行列的解法によって求められた解は、局所的な磁場 $\vec{B}$ と双極子の向き $\vec{m}$ が平行で、かつ内部エネルギーの一階微分 U'＝0、二階微分 U" ＞0 で条件④を満たし、安定な解であることがわかる。

4-2. 一般の場合

4－1節で見た特殊なケース以外は、双極子 i とjの交換対称性が低く、条件⑤⑥⑦を一般には満たさないので行列的方法では解が直接求まらない。

例として 16×16＝256 個の双極子を正方格子上[3]に配置した場合について、行列的解法によって得られた解と、その解から計算した局所的な磁場の向きの関係を見る(図1)。縦軸、横軸ともに角度で表しているので、真の解であれば、傾き1の直線状に乗るはずであるが、双極子の向きと局所的な磁場とが平行になっておらず、図ではバラつきが見られる。

また、$\{\theta_i\}$に関する内部エネルギーU の一階微分U'は-0.881～+0.881 の範囲に散らばっており、条件④を満たしていないことも分かった。

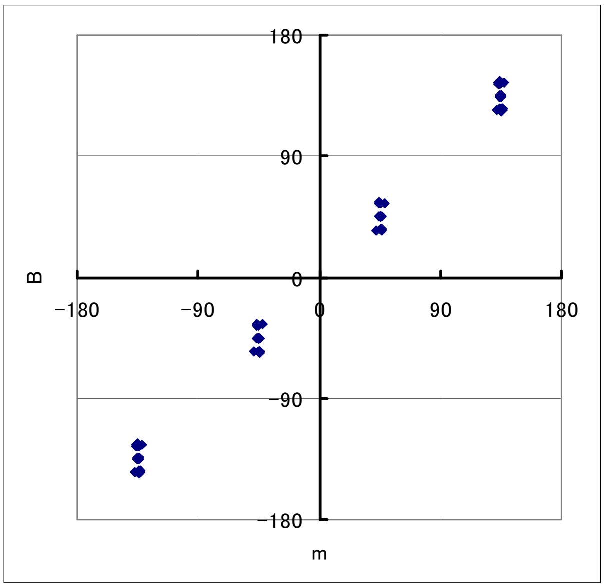


図 1. 正方格子 256 双極子の行列的解法の“解”
各双極子の向き$\vec{m}$と局所的な磁場の向き$\vec{B}$が系統的にズレている。

ただし、系が大きくなればそれだけ各双極子間の交換対称性が高くなるので、行列的解法によって得られる“解”の真の解からのズレはそれほど大きくないと予想される。

そこで、行列的解法によって得られた“解”から局所的な磁場の向きを計算し、その磁場に平行になるように双極子の2次解を作り、その二次的な解から局所的な磁場を計算し、・・・、というフィードバックを行なった。

10 回フィードバックを行なった結果が図 2 である。

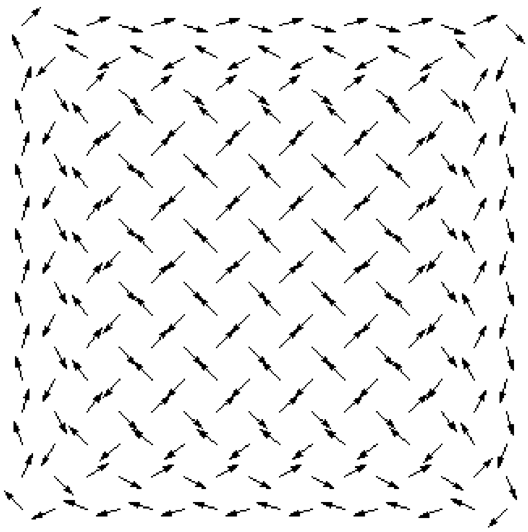


図 2. 10 回フィードバックをした双極子群の“解”
ここでは双極子の向きを矢印で表している。双極子の位置は矢印の起点にある。

図 2 の結果は西松氏らの解[2]によく似ている。

図 2 の場合の各双極子と局所的な磁場の関係を見たものが図 3 である。図 1 と比べ傾き 1 の直線からのズレが減っているのが分かる。

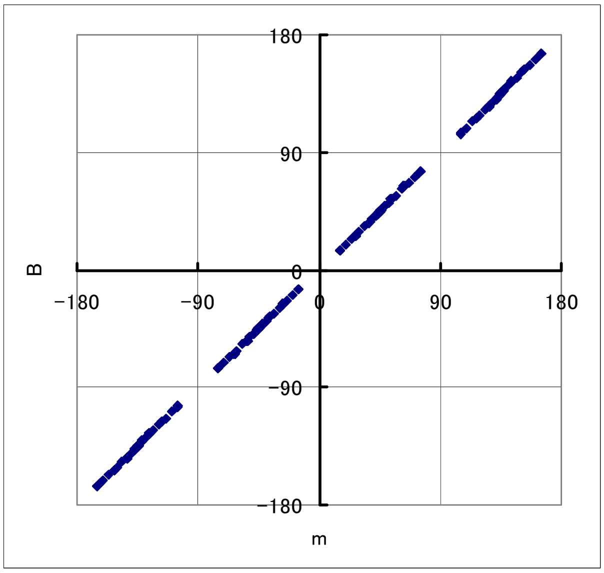


図 3. 10 次解の双極子$\vec{m}$と局所磁場$\vec{B}$の関係
傾き1の直線上に乗るようになっている

一階微分の双極子あたりの平均値$\langle U' \rangle$は行列的解法による解では 0.06 だったものが、フィードバック操作 10 回後には 0.003 まで改善されている。

解のフィードバック操作をすることにより、真の解に近づいていることが分かる。

同様に、三角格子[3]上に 256 個の双極子を配置した場合についても、行列的解法によって得られたものは真の解ではなかったが、10 回のフィードバックをかけることにより、$\langle U' \rangle_1 = 0.06$ から$\langle U' \rangle_{10} = 0.0009$ まで改善したことが確かめられた。

今回の検証により、大きな系に対して行列的解法はシミュレーション的解法の初期条件を与える方法として使える可能性があることが分かった。

参考文献

[1] 斎藤吉彦　物理教育　Vol.53-2,103(2005)
[2] Nishimatsu et al. , 大阪市立科学館研究報告 17, P.1 (2007)
[3]石坂千春　大阪市立科学館研究報告 17, P.7 (2007)
[4]西松毅　プライベートコミュニケーション
[5]バーガー＆オルソン「電磁気学」(培風館) 1991