

# 光線の逐次追跡をしない蜃気楼形状の計算

長谷川 能三\*

## 概要

気温分布から蜃気楼形状を計算することは、蜃気楼の研究や普及教育にとって有用である。しかし、連続して変化する屈折率や地球の丸みを考慮するために、光線を逐次追跡しなければならず、計算にある程度時間がかかる。

今回、屈折率が高さの一次関数で変化する場合には、光の経路が放物線で近似できること、また、地球の丸みを屈折率の変化に組み込むことで、蜃気楼の形状を高速で計算することができるようになった。そこで、この光線の逐次追跡をしない計算方法、および、その利点と欠点について述べる。

### 1. はじめに

蜃気楼によって遠くの景色がどのように変形するかを計算で求めることは、

- ①観測した気温分布から蜃気楼の形状を計算し、実際に撮影した蜃気楼の写真と比較する<sup>[1]など</sup>
  - ②撮影した蜃気楼の写真から気温分布の予測<sup>[2]など</sup>
  - ③蜃気楼の原理の解説<sup>[3]など</sup>
  - ④未だ観測されていない蜃気楼の存在予測などにおいて、有用である。しかし、
  - ④地球の丸みのため境界面が平面でない
  - ⑤屈折率が連続的に変化する
  - ⑥全反射的に光線の方向が変わる点が存在する
- といったことから、その計算は単純ではない。

このため、光の進む経路を逐次計算によって求める光線追跡法<sup>[4]など</sup>が使われる。この方法では、さらに、

- ⑦与えられた気温分布から蜃気楼の形状は計算することができるが、解析的な計算でないため、蜃気楼の形状から気温分布を計算することはできない

という問題がある。そのため、気温分布を予想するには、さまざまなパターンの気温分布で蜃気楼の形状を計算し、その中から撮影した写真に近い形状変化をしているものを選ぶことになる。しかし、気温分布のパラメータを増やすと、気温分布のパターンが指数関数的に増えるため、計算に時間がかかることが難点である。

### 2. 屈折率が連続的に変化する場合の光の経路

スネルの法則では、平坦面を境界として屈折率が異なる場合について、その角度の関係を示しており、

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \dots (1)$$

で表わされる。多数の平行な境界面がある場合には、

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 = \dots \quad \dots (2)$$

となる。これを、層の数を増やし、各層の厚みを薄くし、層と層の屈折率の差を小さくしていく極限を考えると、連続的に屈折率が変化する場合には、

$$n_0 \sin \theta_0 = n(h) \sin \theta(h) \quad \dots (3)$$

となる。ここで、 $h$  は高さで、屈折率  $n(h)$  および光の経路の傾き  $\theta(h)$  は、高さの関数となっている。但し、光の経路が高さの多価関数となる場合があり、その場合は  $\theta(h)$  も高さの多価関数となる。

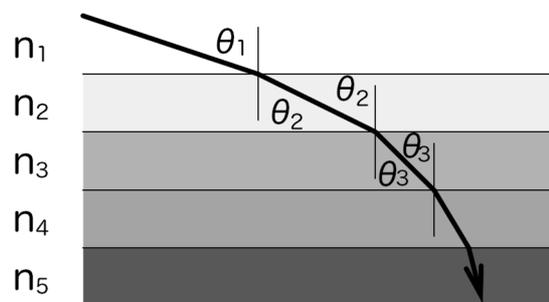


図1. 屈折率の異なる多層体での光の屈折

### 3. 光の経路が放物線になる条件

ここで、屈折率  $n(h)$  がどのような場合に、光の経路が放物線になるかを考える。

\*大阪市立科学館 学芸員  
中之島科学研究所 研究員  
hasegawa@sci-museum.jp

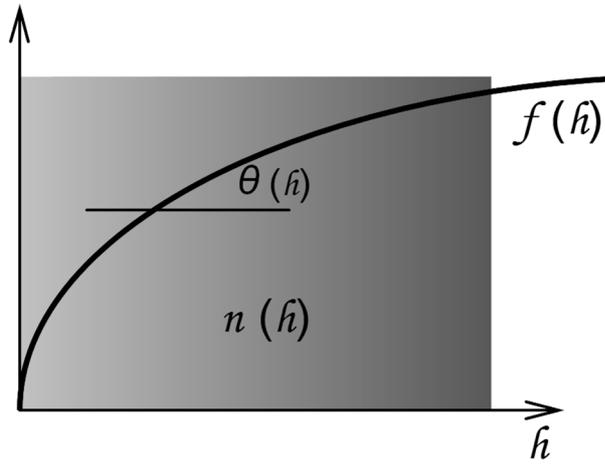


図2. 放物線を描く経路(便宜上  $h$  を横軸としている)

そこで、光の経路  $f(h)$  を、

$$f(h) = \sqrt{ah} \quad \dots (4)$$

とする。また、連続的に屈折率が変化する場合に拡張したスネルの法則(式3)より

$$n(0) = n(h) \sin \theta(h) \quad \dots (5)$$

である。一方、 $f(h)$  の傾きは、

$$f'(h) = \tan \theta(h)$$

より

$$\begin{aligned} f'(h)^2 &= \tan^2 \theta(h) \\ &= \sin^2 \theta(h) / \cos^2 \theta(h) \\ &= \sin^2 \theta(h) / (1 - \sin^2 \theta(h)) \end{aligned}$$

となり、これを  $\sin^2 \theta(h)$  について解いて、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta(h) &= f'(h)^2 / (1 + f'(h)^2) \\ \sin \theta(h) &= \sqrt{f'(h)^2 / (1 + f'(h)^2)} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

となる。

また、(4)式より

$$\begin{aligned} f'(h) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{h}} \\ f'(h)^2 &= a/4h \quad \dots (7) \end{aligned}$$

である。(6)(7)式より、

$$\begin{aligned} \sin \theta(h) &= \sqrt{\frac{a/4h}{1 + a/4h}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{4h + a}} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

となる。

(5)式と(8)式より、光の経路が放物線となるための屈折率は、高さ  $h$  について、

$$\begin{aligned} n(h) &= n(0) / \sin \theta(h) \\ &= n(0) / \sqrt{a/(4h + a)} \\ &= n(0) \sqrt{1 + 4h/a} \quad \dots (9) \end{aligned}$$

となっていないなければならない。

蜃気楼の場合には、 $h \sim 10$ [m] に対し  $f(h) \sim 10$ [km] を想定していることから、 $4h/a \ll 1$  としてよい。このため(9)式は十分よい近似で、

$$n(h) = n(0) \{1 + 2h/a\} \quad \dots (10)$$

となり、屈折率が高さの一次関数になっていけばよいこととなる。つまり、屈折率が高さの一次関数で表わされる場合には、光の経路は放物線を描くと考えてよい。

### 3. 地球の丸みの繰り込み

蜃気楼が発生している状況における光線を描く場合、横方向の距離に対して、高さ方向を100倍程度に強調して描くが、このとき描き方には大きく2通りある。ひとつは、地面を上を凸の曲線で描き、気温(屈折率)が一定の範囲では光線は直進する描き方である。もう一方は、地面を直線で描く方法であり、この場合、気温(屈折率)が一定の範囲でも光線は下に凸の曲線(十分よい近似で放物線)で描かれる。

後者の描き方の場合、地面が平らで気温が高さの一次関数で変化している場合と、計算上は全く同じである。つまり、地球の丸みは、気温分布として扱うことが可能であり、さらに実際の気温分布を加えることで、実際の光線の進行を描くことができる。

### 4. 屈折率と気温の関係

物質の屈折率  $n$  は、その物質の誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu$  を用いて、

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

である。ここで、 $\epsilon_0$  および  $\mu_0$  は、真空の誘電率および透磁率である。物質が非磁性体で、誘電率が分極率  $\chi$  を用いて  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$  で表わされる場合、

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon_0(1 + \chi)\mu_0}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{1 + \chi} \quad \dots (11)$$

となる。

空気の場合、分極率  $\chi$  は単位体積あたりの分子数に比例することから、気圧が一定とすると温度に反比例し、 $c$  をある定数として、

$$n = \sqrt{1 + c/T} \quad \dots (12)$$

となる。ここで、空気の屈折率は 1.0003 程度であることから、 $c/T \ll 1$  である。また、空気の温度  $T$  を基準となる温度  $T_0$  を用いて  $T = T_0 + \Delta T$  と表わし、 $\Delta T \ll T$  とすると、(12) 式は

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{1 + c/(T_0 + \Delta T)} \\ &\cong 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{T_0 + \Delta T} \right) \\ &= 1 + \frac{c}{2T_0} \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)^{-1} \\ &\cong 1 + \frac{c}{2T_0} \left( 1 - \frac{\Delta T}{T_0} \right) \\ &= 1 + \frac{c}{2T_0} - \frac{c \Delta T}{2T_0^2} \quad \dots (13) \end{aligned}$$

となり、空気の屈折率は絶対温度に対して十分小さい温度変化の範囲では、温度の一次関数となる。例えば 27°C を基準温度として数度の温度変化の範囲では、空気の屈折率は

$$n(27^\circ\text{C} + \Delta T) = 1.000321 - 0.00000107 \Delta T \quad \dots (14)$$

と表わされる。

よって、この近似範囲では気温が高さの一次関数になっていれば、光の経路は放物線を描くと考えてよいことになる。

尚、地球の丸みの効果は、気温が 27°C 程度の場合、高さ 1m あたり 0.147°C の温度降下に相当する。

### 5. 光線の逐次追跡をしない蜃気楼形状の計算

このようにして、屈折率(気温)が高さの一次関数で表わされることから、空気を 3 層に分け、低層は気温が一定(冷氣層)、高層も気温が一定(暖気層)とし、中層の気温は低層の気温から高層の気温へ一定の勾配で気温が上がるとする。それぞれの層では、この気温勾配に、地球の丸みを繰り込んだ値を用いる。

また、各層内で光線は放物線を描き、層と層の境界面では傾きが一致するような放物線を選ぶこととする。

今回プログラムには HSP という言語を用いたが、数値計算には特に優れた言語ではない。それでも、図 3 のように多数(50本)の光線の経路も一瞬で描くことができるようになった。そこで、例えば冷氣層と暖気層の気温差を 100 分割で変化させた場合でも、わずか 10 秒あまりでその変化を計算し、表示することができた。

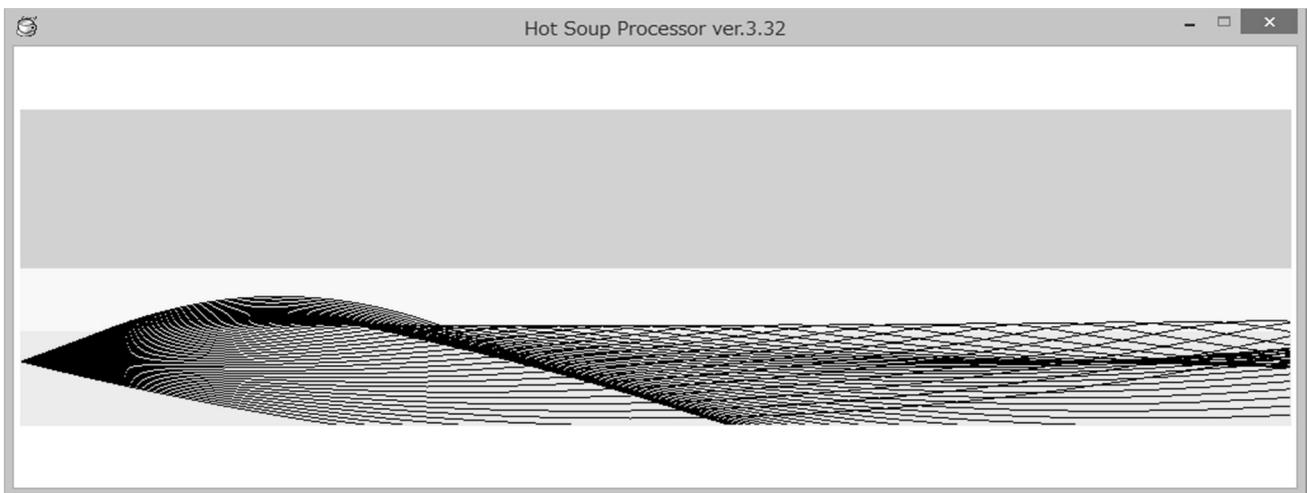


図3. 逐次追跡を用いない光線経路の計算の例

### 5. 考察

今回、このアルゴリズムを用いて HSP 言語で書いたプログラムと、松井氏のインタラクティブな「光の経路図作成」シミュレーター<sup>[4]</sup>を比較したところ、計算速度について大きな優位性はなかった。ただ、使用したプログラミング言語が数値計算に向けた言語ではなかったこともあり、今後、別の言語でのプログラムや、実際にパラメーターを変化させて大量に計算させる場合にこの方法が有効であるのか、確かめていく必要がある。ただ、松井氏のプログラムでは、気温変化を高度の一

次関数に限らず設定することができ、冷氣層と混合層、混合層と暖気層をなめらかに繋ぐことも可能であるが、今回の方法では、屈折率が高さの一次関数になっている層に分けることしかできないのが欠点である。

しかし今回の方法では、場合分けが複雑ではあるが、蜃気楼の変形を解析的に表わすことも可能である。このことから、観測された蜃気楼の変形の形状から、直接気温分布を計算して求めることに繋がる可能性がある。

**参考文献等**

- [1] 木下正博、市瀬和義,「富山湾における上位蜃気楼の発生理由」,天気 Vol.49 No.1 p57-66,日本気象学会 (2002) [http://www.metsoc.jp/tenki/pdf/2002/2002\\_01\\_0057.pdf](http://www.metsoc.jp/tenki/pdf/2002/2002_01_0057.pdf)
- [2] 長谷川能三,「蜃気楼の形状による気温分布の計算」,日本蜃気楼協議会 第3回研究発表会(2006) [http://www.japan-mirage.org/kenkyu/H18/H18\\_02.pdf](http://www.japan-mirage.org/kenkyu/H18/H18_02.pdf)
- [3] 魚津埋没林博物館展示 蜃気楼シミュレーター「知ってミラージュ」
- [4] 松井一幸,「インタラクティブな「光の経路図作成」シミュレーター」  
<http://koayu.eri.co.jp/Biwadas/mirage/JSsimulation/rayTracing2.html>